Л. В. Канторович, А. Б. Горстко

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1972

В этой книге, написанной академиком Л. В. Канторовичем, одним из создателей оптимального математического программирования, и его учеником доцентом А. Б. Горстко, излагаются вопросы, связанные с применением математических методов в экономических исследованиях. Важность таких методов трудно переоценить — они играют весьма существенную роль в деле совершенствования экономической науки, обогащения ее точными количественными методами, еще большей, безусловно, окажется их роль в дальнейшем. Не требуя от читателя глубоких предварительных знаний ни по математике, ни по экономике, книга позволит ему ознакомиться с основными положениями математической экономики, поможет использовать экономико-математические методы в своей практической деятельности. Изложение ведется так, чтобы показать в органическом единстве экономические проблемы и применяемые для их исследования математические методы. Для большей наглядности приведено немало конкретных числовых примеров и жизненных фактов, иллюстрирующих общие теоретические положения.

Книга рассчитана на специалистов разных профилей: инженеров, экономистов, а также преподавателей и студентов. Одним она принесет пользу в их профессиональной деятельности, другим даст возможность ознакомиться с принципами поиска оптимальных решений, что в настоящее время нужно каждому интеллигентному человеку.

$\frac{1-8-3}{21-72}$ НПЛ

ОТ АВТОРОВ

В настоящее время в нашей стране созданы все условия для того, чтобы наука стала (и она действительно становится!) производительной силой общества. Это еще более, чем прежде, повышает ответственность ученого перед обществом. Если раньше могли существовать ученые-затворники, о работах которых знал лишь узкий круг специалистов, то сейчас положение коренным образом меняется. Каждый ученый должен рано или поздно в достаточно популярной форме обратиться не только к своим коллегам по профессии, но и к широкой аудитории, познакомить ее с областью, им изучаемой, результатами, достигнутыми в ней, их значимостью и перспективами применения.

Так как с экономикой в различных ее аспектах приходится сталкиваться практически каждому человеку, то знакомство с новыми математическими методами в этой науке особенно интересно и важно. Эти вопросы приобретают особое значение в свете решений XXIV съезда КПСС, в которых сказано: «В целях совершенствования планирования народного хозяйства и управления обеспечить **широкое применение экономико-математических методов...**»[1]

Эти причины и послужили толчком к тому, что мы решили в популярной форме рассказать о методах поиска оптимальных решений в экономических исследованиях, о математическом оптимальном программировании — этой новой математике, которая возникла в связи с потребностями экономики и взята ею на вооружение.

Предлагаемая книга, с нашей точки зрения, позволит читателю познакомиться с довольно широким кругом

[1] «Материалы XXIV съезда КПСС». М., Политиздат, 1971, стр. 298.

вопросов, связанным с применением математических методов в экономике. Мы старались по мере возможности создать представление о задачах оптимизации, возникающих в экономике, о методах их решения, об органической связи между экономикой и математикой. Наряду с фундаментальными теоретическими вопросами рассматриваются и конкретные численные задачи, что дает возможность внимательному читателю глубже проникнуть в суть дела. При этом мы не ограничиваемся изложением уже разрешенных и нашедших использование вопросов оптимизации экономики, но и указываем на перспективы развития теории, трудности и нерешенные вопросы, стоящие перед ней.

Что касается подготовки читателя, то к ней не предъявляется слишком больших требований. Книга рассчитана на широкий круг специалистов, работающих в разных отраслях хозяйства, которые хотели бы познакомиться с основными современными идеями и методами поиска оптимальных решений в экономике. Она может оказаться полезной и для студентов, учителей и учащихся старших классов средней школы. Конечно, некоторые разделы, требующие знания высшей математики, могут вызвать затруднения, однако при первом чтении можно ограничиться их просмотром. Решающее значение имеет внимание и интерес к теме книги.

Мы надеемся, что, ознакомившись с этой книгой, читатель будет представлять, как связаны математика и экономика. Если же он захочет углубить свои познания в математическом программировании и в дальнейшем применить их в своей деятельности, мы будем считать, что цель, стоявшая перед нами при написании этой книги, достигнута.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЛИНЕЙНО-ПРОГРАММНЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная экономика представляет собой чрезвычайно сложную непрерывно развивающуюся систему гигантского масштаба, состоящую из множества звеньев, выполняющих различные функции. Управление всей экономикой и отдельными ее звеньями делается все более затруднительным из-за колоссального многообразия возможных производственных решений, принимаемых на различных уровнях. Особую важность в связи с этим приобретают вопросы научно обоснованного поиска оптимальных решений в различных экономических ситуациях — решений, повышающих эффективность народного хозяйства, обеспечивающих максимальный выпуск необходимой продукции.

Нужно сказать, что вообще характерной чертой планово-производственных и других экономических задач является множественность возможных решений: определенную продукцию можно получить различными способами, по-разному выбирая сырье, применяемое оборудование, технологию и организацию производственного процесса. Казалось бы, что при наличии нескольких возможных решений нужно просто рассмотреть их все и выбрать наилучшее. Однако эта простота обманчива. Так как каждый план на любом уровне экономической системы — от цеха до народного хозяйства получается в результате сочетания элементарных производственных решений, то число всех таких комбинаций оказывается столь велико, что уже в сравнительно простых задачах полный перебор всех возможных вариантов неосуществим даже при использовании самых современных ЭВМ.

Между тем для практики одним из наиболее важных вопросов экономики является построение плана, так как при удачном выборе его при меньших затратах может быть достигнут бóльший эффект и наоборот Особую роль этот вопрос играет в социалистическом обществе — обществе, ставящем перед собой задачу наиболее полного удовлетворения потребностей трудящихся Именно в нем благодаря плановости хозяйства и общественной собственности на средства производства может быть достигнуто наиболее полное и эффективное использование имеющихся и выделенных для производства ресурсов, обеспечивающее максимальный выпуск нужной продукции Поэтому в социалистической экономике из математических методов наибольшее значение получили методы нахождения наилучшего, оптимального решения, объединяемые названием *математическое оптимальное программирование* [1]

По самой своей природе математические методы могут применяться не непосредственно к изучаемой действительности, а лишь к математическим моделям того или иного круга явлений Поэтому для применения математических методов в экономике оказалось необходимым создавать модели экономики. Конечно, результаты исследования этих моделей представляют практический интерес, только если сами модели достаточно адекватно отображают реальные ситуации, если они достаточно совершенны

В течение длительного времени в экономической науке использовался весьма ограниченный арсенал математических моделей. Наиболее широко применялись модели и описания использующие алгебраические соотношения и обозначения При изучении экономических проблем делались также попытки использовать дифференциальное и интегральное исчисления Иными словами, математический аппарат, возникший в связи с проблемами математической физики и теоретической механики, применялся для исследования и решения экономических задач В дальнейшем возникла необходимость в создании математических методов, специально приспособленных к задачам экономического анализа Именно потребностям экономики

[1] Этот термин не следует смешивать с термином «программирование», обозначающим составление программы, осуществляющей определенный вычислительный процесс (алгорифм) на ЭВМ

обязан своим происхождением ряд новых математических дисциплин, таких, как линейное программирование, динамическое программирование, теория игр. теория графов и др Весь этот комплекс прикладных математических дисциплин вместе с математическими моделями, порожденными и связанными с определенными экономическими проблемами, описывающими экономику предприятия, отрасли, народного хозяйства или отдельные экономические процессы в них может быть объединен общим названием — математическая экономика

Следует сказать, что, как показало развитие науки, математические модели экономических процессов не только не проще моделей естественнонаучных проблем, а, наоборот, нередко сложнее их по структуре, более громоздки по своим масштабам (числу параметров, их взаимосвязям) Поэтому здесь оказывается особенно существенным последовательное улучшение моделей, объединение их в системы, переход в результате анализа от более простых моделей к более сложным и полным Трудности математического описания экономических явлений стали причиной того что одно время даже существовало мнение о невозможности и неприемлемости применения математических методов исследования во многих областях экономики, опасение, что математика может вытеснить экономическую науку, затушевать природу экономических явлений

Но в настоящее время уже трудно найти человека, сомневающегося в возможности и даже необходимости применения математических методов в экономике Эти методы заняли подобающее место в богатом арсенале экономической науки

Перейдем теперь к ознакомлению с одним из наиболее развитых и широко применяемых на практике разделов математической экономики — линейным программированием

2 ПРОСТЕЙШАЯ ЛИНЕЙНО ПРОГРАММНАЯ МОДЕЛЬ — ЗАДАЧА О РАСКРОЕ

Знакомство с новым разделом прикладной математики лучше всего начать с описания элементарной экономической задачи. Это позволит разъяснить все необходимые новые понятия и сущность методов линейного программирования. Но прежде — небольшая общая характеристика этого раздела математической экономики и несколько специальных терминов.

Как правило, всякой задаче поиска решения в экономике сопоставляется *целевая функция*, позволяющая количественно сравнивать возможные решения, оценивать их. Возникающие естественным образом при поиске оптимального решения задачи, в которых отыскивается максимум или минимум целевой функции при наличии ограничений на переменные, объединяются общим названием — *задачи математического программирования*.

Наряду с термином *решение* в математическом программировании употребляются в том же смысле термины *план*, *стратегия*, *управление*, *поведение*. Всякий набор значений переменных, удовлетворяющий ограничениям задачи, носит название *допустимого плана*. Тот же допустимый план, на котором достигается экстремум (максимум или минимум) целевой функции, называется *оптимальным планом*.

Все задачи математического оптимального программирования в зависимости от вида целевой функции и ограничений могут быть разбиты на ряд классов так, что каждый класс характеризуется своими методами решения входящих в него задач. Знакомство с этими классами начнем с наиболее изученного из них — класса, в котором и целевые функции задач, и ограничения линейны. Этот круг задач в совокупности с методами отыскания оптимальных решений в них носит название *линейного программирования*.

Основной идеей линейно-программной модели является рассмотрение производственного плана как составленного из элементарных производственных способов. В этой модели принята гипотеза линейности. Суть ее в том, что каждый производственный процесс предполагается возможным применять с любой кратностью (интенсивностью) и при этом затраты и выход продукции меняются пропорционально; результаты процессов суммируются. В силу такой гипотезы всякий план можно представить в виде набора некоторого числа основных способов, примененных с различными интенсивностями. В ходе решения интенсивности определяются так, чтобы ограничения были удовлетворены, а целевая функция достигала максимума или минимума.

Сделав эти предварительные замечания, перейдем к рассмотрению конкретной *задачи о раскрое*. Листы материала размером $6 \cdot 13$ м^2 нужно раскроить так, чтобы получились заготовки двух типов: 800 шт. заготовок типа A ($4 \cdot 5$ м^2) и 400 шт. типа B ($2 \cdot 3$ м^2), израсходовав при этом как можно меньше материала. (Для решения такой задачи, конечно, не нужна специальная теория. Но эта задача используется в книге как пример, на котором разъясняются методы линейного программирования.)

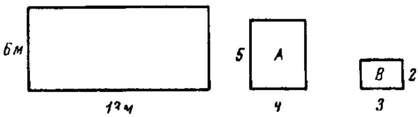


Рис. 1

На рис. 1 изображены исходные листы материала и выкраиваемые из них заготовки. Каждый лист можно раскраивать различными более или менее удачными способами, получая соответственно больше или меньше различных заготовок.

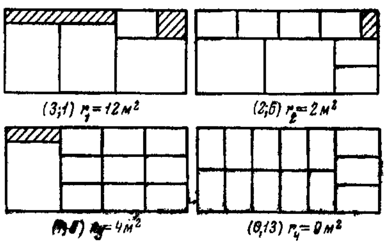


Рис. 2

На рис. 2 приведены некоторые из возможных способов раскроя, причем в скобках указано, сколько заготовок получается из каждого листа: первая цифра — тип A, вторая — тип B, а числа r_i обозначают потери материала при каждом способе. Раскроить подобным образом можно было бы без всякой математики. А вот какие из способов использовать и для какого числа листов их применить — это вопрос, при решении которого без математики не обойтись. Ведь просмотреть все мыслимые варианты, комбинации способов и выбрать из них наилучший — задача, которая, например, при двадцати типах заготовок не может быть решена и современными ЭВМ.

Переходим к математическому описанию задачи.

Обозначим через x_i число листов материала, раскраиваемых по i-му способу. Пусть a_i и b_i обозначают соответственно число заготовок типа A и B, получаемых при использовании i-й карты раскроя. Например, для первой карты $a_1 = 3$, $b_1 = 1$, а вся матрица способов имеет вид:

ТАБЛИЦА 1

Заготовка	Способы			
	1	2	3	4
A	3	2	1	0
B	1	6	9	13

Используя введенные обозначения, можно дать теперь такую математическую формулировку интересующей нас задачи: найти минимум линейной функции, выражающей число израсходованных листов материала (по всем способам),

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

при условии, что переменные x_i удовлетворяют следующим ограничениям:

$$(1)\quad \begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 &\geqslant 800 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 &\geqslant 400 \end{aligned}$$

или, подставляя числовые значения (см. табл. 1),

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 800$$

$$x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \geqslant 400$$

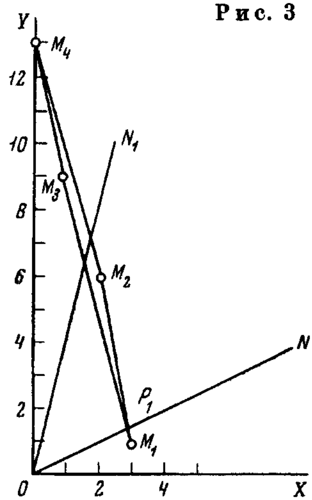
(экономический смысл ограничений (1): соблюдена комплектность — все необходимые заготовки сделаны в достаточном числе).

$$(2)\quad \begin{aligned} &x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \\ &x_3 \geqslant 0, \ x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

(экономический смысл ограничений (2): ни один способ не применяется к отрицательному числу листов материала, так как физически это означало бы, что из заготовок делаются целые листы).

Это характерные условия задачи линейного программирования: *найти минимум (максимум) линейной формы (функции) при линейных ограничениях.*

Рис. 3



Сделаем следующее вспомогательное построение (рис. 3). В прямоугольной системе координат XOY каждому возможному раскрою сопоставим точку, у которой координата x равна числу заготовок типа A, получаемых при этом раскрое, а координата y — числу заготовок типа B. Эти точки обозначены буквой M с индексом, указывающим номер раскроя. Например, первому раскрою соответствует точка M_1 с координатами $x_1 = 3$, $y_1 = 1$.

Точки на отрезке M_1M_2 указывают своими координатами количество заготовок типа A и типа B, приходящихся в среднем на один лист материала в различных планах раскроя, которые представляют собой сочетания раскроев M_1 и M_2. Можно доказать, что множество всевозможных планов раскроя, являющихся комбинациями M_1, M_2, M_3 и M_4, если их характеризовать выходами заготовок, приходящихся на один лист, изображается совокупностью точек выпуклого многоугольника $M_1M_2M_3M_4$, который называется многоугольником осуществимых планов. Обычно для удобства в число вершин многоугольника осуществимых планов включают и начало координат, так что в окончательном виде такой многоугольник имеет вид $OM_1M_2M_4$. (Экономически это соответствует тому, что осуществимым считается также план, в котором часть полученных заготовок остается неиспользованной.)

Нас интересуют прежде всего те осуществимые планы, для которых выполнено условие комплектности. В них отношение числа заготовок типа A к числу заготовок типа B соответствует заданному, т. е. равняется 2 (800 : 400). На рис. 3 эти планы изображаются точками, лежащими на луче N. Такие планы называются *ассортиментными.*

Ассортиментному выпуску соответствует допустимый план (для которого выполнены все ограничения 1 и 2). Из ассортиментных планов раскроя выбирается оптимальный план. Ему соответствует точка, принадлежащая одновременно многоугольнику и лучу и имеющая наибольшие координаты, т. е. соответствующая плану, дающему наибольший выход заготовок в данной пропорции на один лист. Такой является точка P_1 — точка пересечения луча с границей многоугольника $OM_1M_2M_4$. Так как точка P_1 принадлежит отрезку M_1M_2, можно сделать заключение, что оптимальный план представляется комбинацией раскроев M_1 и M_2.

Обозначим через z ту долю материала, которая кроится по раскрою M_1; остальная часть $1 - z$ кроится по M_2. Из условия комплектности (табл. 1) следует, что

$$\frac{3z + 2(1-z)}{1z + 6(1-z)} = 2,$$

откуда $z = \frac{10}{11}$. Этот результат можно было получить и графически, измерив отрезки M_1M_2 и M_2P_1 (см. рис. 3) и заметив, что

$$\frac{M_2P_1}{M_1M_2} = \frac{10}{11}.$$

Искомое минимальное число листов материала L находится, например, из условия получения нужного числа заготовок A.

$$\frac{10}{11} \cdot L \cdot 3 + \frac{1}{11} \cdot L \cdot 2 = 800.$$

(Экономический смысл этой формулы таков: первый раскрой применяется к $\frac{10}{11} L$ листов, при этом из каждого листа получается три заготовки типа A. Второй раскрой применяется к $\frac{1}{11} L$ листов, при этом из каждого листа получается две заготовки типа A. Общее число заготовок типа A должно соответствовать плановому заданию, т. е. равняться 800.)

Решая уравнение, получаем, что необходимое (минимальное) число листов материала

$$L = \frac{800 \cdot 11}{32} = 275.$$

Иначе говоря, оптимальный план раскроя состоит в том, что 250 листов кроятся по первому раскрою ($x_1 = 250$), а 25 листов — по второму раскрою ($x_2 = 25$).

Любой другой план раскроя оказался бы неоптимальным. Для примера в табл. 2 приведены два плана (первый — с использованием только способа 1, второй — только спо-способа 3), составленных на «глаз», и оптимальный план.

ТАБЛИЦА 2

	Заготовки типа A	Заготовки типа B	Листы материала	Потери материала, $м^2$
План 1	1200	400	400	4800
План 2	800	7200	800	3200
Оптимальный план	800	400	275	3050

Если бы количество заготовок было больше двух, то графический способ решения (рис. 3) оказался бы практически трудно реализуемым. Дело в том, что для изображения множества осуществимых планов нужно построить очень сложную геометрическую фигуру — многогранник в многомерном пространстве. Поэтому для решения задачи более рационально использовать аналитические методы и, в частности, эффективный *метод разрешающих множителей* — оценок, особых показателей, характеризующих оптимальный план.

Что же такое оценки? Это некоторые условные цены для единицы каждого вида продукции и затрачиваемых производственных факторов (например, в данной задаче продукция — заготовки типов A и B, а производственный фактор — листы материала), связанные с оптимальным планом, объективно обусловленные им. Поэтому такие оценки получили название объективно обусловленных, или сокращенно *о. о. оценок.*

С помощью о. о. оценок удается сформулировать признак оптимальности решения задачи линейного программирования, оказывается возможным выяснить, оптимален ли некоторый допустимый план без сравнения его со всеми остальными возможными планами. Если не вдаваться в математические детали, то экономический смысл признака оптимальности состоит в следующем: для оптимального плана всегда имеются такие оценки, что скалькулированная по ним результативная эффективность способа равна нулю для используемых способов и не может быть более нуля для неиспользуемых. Иначе говоря, все используемые способы оправданы, рентабельны (результаты оправдывают затраты), а во всех отброшенных способах оценка затрат не меньше оценки произведенной продукции, т. е. их применение нерентабельно или во всяком случае не более рентабельно, чем применяемых способов.

Вернемся к нашей задаче и на ней поясним значение о. о. оценок. Покажем, как их находят и как с их помощью можно убедиться, что найденный план (250 листов кроятся по первому способу, а 25 — по второму) действительно оптимален. Введем условные цены — оценки для одного листа раскраиваемого материала и для каждой из заготовок, обозначив их соответственно через U, V, W. Нужно найти такие значения этих величин, при которых используемые способы окажутся рентабельными, а остальные не более рентабельными, чем применяемые. Если это удастся сделать — план оптимален.

В соответствии с изложенным выше смыслом о. о. оценок условия рентабельности запишутся так:

$$-U + 3V + W = 0 \qquad -U + 2V + 6W = 0$$

(экономическое значение этих условий можно разъяснить на примере первого из них: затраты одного листа материала с оценкой U должны компенсироваться полученными результатами при раскрое по способу M_1 — тремя заготовками типа A по оценке V и одной заготовкой типа B по оценке W).

Так как два уравнения содержат три неизвестных, то значение одного из них можно выбрать произвольно (важно соотношение оценок, а не их абсолютное значение). Примем $U = 16$. Тогда легко получить $V = 5$, а $W = 1$. Сумма оценок заготовок, получаемых из одного листа материала, в каждом из двух применяемых раскроев одинакова и равна 16. Если же мы возьмем неиспользованные производственные способы 3 и 4 (табл. 1), то для них оценка продукции составит 14 и 13, т. е. будет меньше 16, ниже оценки затрат. Следовательно, данный план допустим и имеются согласованные с ним оценки. Это значит, согласно высказанному общему критерию оптимальности плана, что более экономного плана быть не может.

В справедливости последнего утверждения можно убедиться, рассуждая следующим образом. Предположим, имеется какой-то другой план раскроя, дающий те же нужные заготовки. Если просматривать раскроенные листы и записывать по пять единиц за каждую заготовку A и по единице за заготовку B, общая сумма составит не меньше $800 \cdot 5 + 400 \cdot 1$, т. е. 4400. С другой стороны, при добавлении каждого листа прирост этой суммы составит не больше 16, так как сумма оценок заготовок не превосходит 16 ни при одном из раскроев. Значит, число листов не может быть меньше 275 (4400 : 16), т. е. оно не меньше того числа листов, которое расходуется при выбранном плане, являющемся, таким образом, оптимальным. Дальше будет приведено и аналитическое доказательство этого факта в общем случае.

Отметим, что эти оценки имеют и простой геометрический смысл, который позволяет дополнительно пояснить наш критерий. Уравнение прямой M_1M_2 на рис. 3 может быть записано как

$$5x + y = 16.$$

Коэффициенты этого уравнения совпадают с оценками заготовок, свободный член равен сумме оценок заготовок, получаемых из одного листа в используемых раскроях. Таким образом, для плана, скомпонованного из раскроев M_1 и M_2, выход заготовок изображается точкой отрезка M_1M_2, а суммарная оценка продукции, приходящейся на один лист, равна 16. Если бы план включал какой-нибудь иной раскрой, то этому плану соответствовала бы точка ниже прямой M_1M_2 и оценка продукции, приходящейся на один лист, оказалась бы меньше 16. Это свидетельствует об оптимальности плана, составленного из раскроев M_1 и M_2.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Так как наклон прямой связан с оценками заготовок, это значит, что при передвижении по отрезку M_1M_2 (при переходе от одного оптимального плана к другому) соотношение заготовок изменяется: заготовки A заменяются заготовками B в соответствии с их объективно обусловленными оценками (о. о. оценками) в пропорции 1 : 5. При существенно иной пропорции заготовок в задании решение определялось бы крайней точкой многоугольника на другом луче. Оно было бы скомпоновано из других раскроев, и в соответствии с этим мы имели бы опорную прямую с другим наклоном и соответственно другое соотношение оценок для заготовок A и B. Например, если заменить задание, потребовав, чтобы заготовок типа A было выпущено 400, а типа B — 1600, то ассортиментные планы геометрически изобразятся лучом ON_1 (см. рис. 3).

Приведенный критерий, таким образом, обеспечивает возможность проверить «оптимальность» данного плана, не сопоставляя его с другими планами. Достаточно построить для него оценки и по ним сравнить продукцию и затраты в используемых способах. Если окажется, что план не оптимален, будет видно, какие изменения нужно внести, чтобы его улучшить.

Казалось бы, из геометрической интерпретации сразу виден способ решения задач линейного программирования. Достаточно построить многоугольник осуществимых планов и найти крайнюю точку пересечения луча, изображающего множество ассортиментных планов, с этим многоугольником. Однако если число выкраиваемых заготовок равно n, каждому раскрою соответствует точка n-мерного пространства, а многоугольник осуществимых планов превращается в многогранник в этом n-мерном пространстве. Условия ассортиментности определяют луч в том же пространстве и, стало быть, геометрически задача сводится к очень сложному процессу поиска крайней точки пересечения многогранника с лучом. Таким образом, еще раз подтверждается, что кажущаяся при геометрической интерпретации простота решения задач линейного программирования является обманчивой.

Как же решать задачи линейного программирования с большим числом переменных и ограничений? В основе наиболее эффективных методов, которые предназначены для этой цели, лежит использование упоминавшихся уже о. о. оценок и признака оптимальности решения задачи. Общая схема расчетов начинается с того, что ищется какое-нибудь решение задачи, так называемое первое приближение — некоторый допустимый план. Обычно это удается сделать без особого труда, привлекая на помощь лишь здравый смысл.

Например, в задаче о раскрое допустимый план может быть построен так. Возьмем способ раскроя, при котором получается заготовка типа A, и применим его к такому числу листов, чтобы иметь нужное число заготовок первого типа. Возможно, при этом будет получено и некоторое число заготовок типа B. Если их достаточно, то допустимый план уже найден, если же нет, то увеличим их количество до необходимого с помощью другого (или этого же) способа раскроя. Получившееся количество листов материала и примененные способы раскроя определяют допустимый план. Если бы заготовок было больше, чем две, то, продолжая последовательно удовлетворять требования по заготовкам каждого типа, мы также пришли бы в конце концов к допустимому плану.

В соответствии с общей схемой расчетов найденный допустимый план проверяется на оптимальность. Если окажется, что для этого плана выполнен критерий оптимальности (могут быть найдены такие неотрицательные оценки каждого вида продукции и производственных факторов, что для технологических способов, используемых в этом плане, алгебраическая сумма затрат и результатов в этих способах равна нулю, а для способов, не включенных в план, эта же сумма меньше или равна нулю), то этот план оптимален. Если же выясняется, что таких оценок не существует, то план наверняка не оптимален и, значит, надо переходить к «лучшему» допустимому плану. Такой переход может, вообще говоря, осуществляться различными методами. Ниже мы даем описание основной идеи одного из них.

Метод последовательного улучшения плана состоит в том, что в план вводится более эффективный неиспользовавшийся ранее способ, за счет которого достигается увеличение выпуска продукции. Этот способ находят в процессе определения оценок. Последовательно вводя такие способы, улучшают план до тех пор, пока не получат оптимальный план.

Чтобы лучше понять сущность метода последовательного улучшения плана, представьте себе, что из урны, в которой имеется миллион шаров с произвольными номерами, вы хотите извлечь шар с наибольшим номером. Если добиваться этого результата обычным эмпирическим путем, придется чуть ли не 1 000 000 раз вытаскивать шары из урны, не возвращая их назад. Это адская работа и назначить ее могут только в качестве наказания. Но допустим, что вам помогает... ангел-хранитель, и после каждого очередного извлечения шара с каким-то номером он уничтожает в урне все шары с меньшими номерами. Тогда общее число шаров будет быстро убывать (примерно вдвое после каждого вытаскивания), и для того, чтобы вытащить шар с наибольшим номером, вам потребуется всего 20—30 извлечений. Так вот, ваш ангел-хранитель — это метод последовательного улучшения плана.

Рассмотрим применение этого метода к нашей задаче о раскрое. Допустим, что в качестве начального выбран план, использующий первый и четвертый способы раскроя (см. табл. 1). В нем число листов материала, раскраиваемого каждым из этих способов, составляет (округленно): $x_1 = 267$, а $x_4 = 11$. Прежде всего убедимся в том, что этот план допустимый, т. е. удовлетворяет поставленным ограничениям. Для этого подставим в него цифры из табл. 1. Получим $3 \cdot 267 = 801 > 800$; $1 \cdot 267 + 13 \cdot 11 = 410 > 400$. Допустимость плана подтверждена.

Далее приступим к проверке плана на оптимальность. Для этого, как и раньше, введем оценки U, V, W соответственно для одного листа материала, первой и второй заготовок. Условия рентабельности в соответствии с табл. 1 запишутся на этот раз следующим образом:

$$-U + 3V + W = 0,$$

$$-U + 13W = 0.$$

Полагая $U = 13$ (так как имеются два уравнения с тремя неизвестными, то одно неизвестное можно задать произвольно), находим оценки заготовок: $V = 4$ и $W = 1$. Пользуясь ими, оценим продукцию, получаемую при каждом способе раскроя:

Способ	1.	$3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 13$,
»	2.	$2 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 14$,
»	3.	$1 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 13$,
»	4.	$0 \cdot 4 + 13 \cdot 1 = 13$.

Теперь уже ясно, что рассматриваемый план не оптимален, так как среди неиспользованных оказался способ 2, более рентабельный, чем используемые. Очевидно также и то, как именно план может быть улучшен. Для этого нужно ввести в него второй, наиболее рентабельный способ, исключив, если нужно, один из имеющихся.

Пусть второй способ применяется с интенсивностью Δx_2. Использование нового способа приводит к изменению интенсивностей употреблявшихся ранее способов. Обозначая эти изменения через Δx_1 и Δx_4, запишем условие того, что плановое задание будет выполнено точно. Имеем

$$3(x_1 + \Delta x_1) + 2(x_2 + \Delta x_2) = 800,$$

или

$$3\Delta x_1 + 2\Delta x_2 = -1,$$

$$1(x_1 + \Delta x_1) + 13(x_4 + \Delta x_4) + 6(x_2 + \Delta x_2) = 400,$$

или

$$\Delta x_1 + 6\Delta x_2 + 13\Delta x_4 = -10.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\Delta x_2,$$

$$\Delta x_4 = -\frac{29}{39} - \frac{16}{39}\Delta x_2.$$

Вновь вводимый способ желательно использовать с наибольшей положительной интенсивностью, но все же такой, чтобы остальные интенсивности остались неотрицательными. При увеличении Δx_2 первой обращается в нуль интенсивность четвертого способа $x_4 + \Delta x_4 = 0$, т. е. нужно принять $\Delta x_4 = -11$. Иными словами, Δx_2 находится из условия

$$-\frac{29}{39} - \frac{16}{39}\Delta x_2 = -11.$$

В результате искомые изменения интенсивностей способов равны соответственно

$$\Delta x_1 = -17, \ \Delta x_2 = 25 \text{ и } \Delta x_4 = -11,$$

а новый, улучшенный план имеет вид:

$$x_1 = 250 \text{ и } x_2 = 25 \ (x_4 = 0).$$

Это тот самый план, оптимальность которого уже была доказана ранее.

Конечно, переход от допустимого плана к оптимальному редко удается осуществить за одно приближение (итерацию), но все же после каждой итерации план улучшается. Получив новый план, мы прежде всего, определяя оценки, выясняем, не оптимален ли он. Если да, то решение заканчивается. Если же нет, то снова применяется метод последовательного улучшения плана. Доказано, что с помощью этого метода за конечное число улучшений можно прийти от любого допустимого плана к оптимальному. И, что самое главное, не просто за конечное, а за разумное число улучшений! Для его реализации на ЭВМ требуются не миллионы лет, а секунды, минуты или на худой конец часы.

Так как в основе метода последовательного улучшения плана лежит использование о. о. оценок и, кроме того, роль этих оценок чрезвычайно велика как в теоретических вопросах математического программирования, так и в вопросах его практического использования, целесообразно более подробно остановиться на изучении их свойств.

Существеннейшей особенностью задач линейного программирования является тот факт, что каждой из них соответствует определенная, тесно связанная с ней другая задача линейного программирования, получившая название *двойственной*. Оказывается, что упоминавшиеся выше объективно обусловленные оценки единицы каждого вида продукции и затрачиваемых производственных факторов, которые были получены при решении первоначальной задачи на минимум, сами являются решениями некоторой задачи на максимум. Эта сопряженная с нашей задача называется двойственной задачей линейного программирования. Покажем, как естественным образом возникает задача, двойственная к задаче раскроя, и дадим ее экономическую и геометрическую интерпретации.

Чтобы выяснить экономическую суть дела, следует рассмотреть следующую условную ситуацию. Пусть имеется экономическая система, состоящая из двух частей: Завод и Заготовительный цех. Завод для производственных целей заказывает Цеху произвести из листового материала заготовки типов A и B в нужном ассортименте. При этом Завод, естественно, заинтересован, чтобы затраты материала были наименьшими. Выбор способов раскроя, которые обеспечат требуемое количество заготовок при наименьших затратах материала, производится на основе решения задачи линейного программирования, которая уже была рассмотрена выше (будем называть ее *прямой задачей*). При этом отношения между Заводом и Цехом построены на экономических основах, т. е. Завод оплачивает работу цеха по определенным ценам (на самом деле такое описание экономических отношений чрезвычайно упрощенно, и именно поэтому приведенный пример условен). Какими должны быть эти «цены»? Лучше всего, если они будут обеспечивать наибольшую выгоду обеим сторонам — и Цеху-изготовителю и Заводу-потребителю. Задача отыскания таких «выгодных цен» и есть двойственная задача линейного программирования.

Напомним, что оценки заготовок типов A и B обозначались соответственно через V и W, а оценку исходного листа можно считать равной единице (так выбирается масштаб цен). При использовании первой карты раскроя выкраивается a_1 заготовок типа A и b_1 заготовок типа B. Чтобы цены были оправданными, суммарная оценка продукции не должна превышать оценку исходного листа материала, т. е. должно выполняться неравенство

$$a_1V + b_1W \leqslant 1$$

(иначе Заводу было бы невыгодно передавать раскрой Цеху). Аналогичные неравенства должны выполняться и для всех остальных способов. Естественным представляется и другое, уже упоминавшееся требование: оценки следует выбирать так, чтобы суммарная оценка всей произведенной продукции имела максимальную величину.

Используя конкретные числовые значения, приходим к следующей задаче. Найти оценки V и W так, чтобы достигался $\max\{800V + 400W\}$, при условиях

$$(1') \qquad \begin{aligned} 3V + W &\leqslant 1 \\ 2V + 6W &\leqslant 1 \\ 1V + 9W &\leqslant 1 \\ 0V + 13W &\leqslant 1 \end{aligned}$$

(эти условия означают, что при любом способе раскроя оценка полученных из листа заготовок не превосходит оценки самого листа, т. е. покупать заготовки выгодно);

$$(2') \qquad V \geqslant 0, W \geqslant 0$$

(эти условия означают, что оценки неотрицательны).

Очевидно, что решениями этой задачи являются величины $V = \frac{5}{16}$ и $W = \frac{1}{16}$, т. е. прежние оценки, отнесенные к оценке листа материала. При таких «ценах»

Цеху выгодно кроить листы, а Заводу выгодно покупать заготовки.

Двойственная задача имеет такую же простую геометрическую интерпретацию, как и прямая задача. Условия (1') — (2') определяют некоторый многоугольник, лежащий в первом квадранте плоскости VOW (рис. 4). Он и является многоугольником допустимых планов двойственной задачи. Уравнение $800V + 400W = C$ определяет прямую линию, проведенную на этой же плоскости. Будем перемещать теперь эту прямую параллельно самой себе в направлении, указанном на рис. 4. При этом значение целевой функции будет увеличиваться и достигнет максимума в точке P. С точки зрения геометрии ясно, что оптимальным решением задачи, как правило, является одна из вершин многоугольника допустимых решений двойственной задачи. Если же окажется две такие вершины, то тогда любая точка соединяющего их отрезка также будет оптимальным решением.

Использование о. о. оценок лежит в основе не только метода последовательного улучшения плана, о котором мы говорили выше, но и многих других методов решения задач линейного программирования. В качестве примера упомянем *метод корректировки оценок*. Исходными в этом случае являются приближенные значения оценок, по которым находятся наиболее рентабельные (при этих оценках) способы. Из этих способов формируется план, лишь частично соответствующий заданию или, на языке математики, удовлетворяющий только некоторым ограничениям, т. е. план, кото-

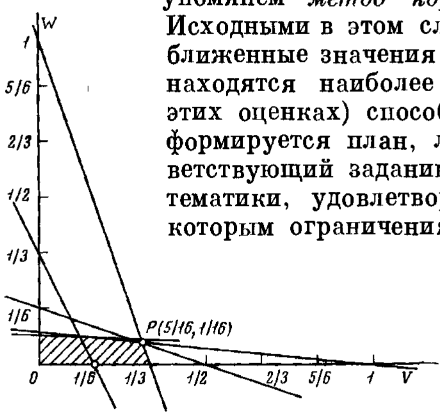


Рис. 4

рый не является допустимым. В нем отдельные виды продукции будут получены в избытке, других же будет не хватать. Затем для тех видов продукции, которые получились в избытке, оценки снижаются, а для тех, которые оказались в недостатке,— повышаются. Соответственно меняется набор рентабельных способов, из которых строится новый план. В конце концов создается допустимый план, а так как одновременно получаются согласованные с ним оценки, то этот план и будет оптимальным.

Высокая эффективность численных методов решения задач способствовала признанию и распространению линейного программирования, обеспечила возможность применения методов линейного программирования для исследования и решения многих практических проблем. Например, вагоноремонтный завод им. Егорова, где рациональный раскрой на основе таких методов был введен более 20 лет назад, до сих пор остается лучшим по использованию металла среди ленинградских заводов. Отметим, что работа, проведенная на этом заводе, является одним из первых в мире практических опытов применения методов линейного программирования. Недавно в Институте математики СО АН СССР и других учреждениях сделаны дальнейшие шаги в развитии методов рационального раскроя с использованием линейного и динамического программирования, а также ЭВМ. Автоматизировано не только комбинирование раскроев, но и нахождение самих карт раскроя.

Характерной особенностью математики является тот факт, что одна и та же математическая задача, одно и то же математическое описание могут применяться в самых разнообразных случаях, для решения разных реальных вопросов. Задача о рациональном раскрое, в частности, также имеет многочисленные применения.

Для многих производств типичным является комплексный (совместный) выпуск нескольких видов продукции при использовании одного и того же исходного сырья и ресурсов: нефтепереработка, плавка полиметаллических руд, разведение мясо-молочного скота и т. д. Во всех этих случаях можно получать конечные продукты в различных пропорциях, подобно тому, как при разных способах раскроя меняются соотношения в числе заготовок. Ясно, что во всех этих случаях применима та же математическая модель, которая использовалась в задаче о раскрое. На ее основе могут быть решены задачи выбора производственных способов, позволяющих получить продукцию нужного состава с наименьшими затратами.

Не менее типичной является ситуация, когда решается вопрос о мере использования каждого из заданных видов продукции для достижения определенной цели. Математическое описание связанных с этих кругом вопросов получило название *задач о смесях*. Например, для получения легированной стали нужно использовать шихту, удовлетворяющую определенным требованиям относительно химического состава. В зависимости от своих ингредиентов шихта имеет самую разную цену. Поэтому возникает задача о выборе наиболее дешевой шихты, в составе которой имеются необходимые химические вещества в заданных количествах. Второй пример. Бензины разных сортов получаются путем смешивания нефтепродуктов, имеющих различные технические характеристики и разные цены. Задача состоит в том, чтобы построить такой план смешивания нефтепродуктов, который обеспечивал бы максимальную рентабельность производства, позволяя в то же время получать бензины заданных сортов в нужных пропорциях.

Задачи, которые представлены в обоих примерах, могут быть описаны с помощью математических моделей, подобных той, что использовалась в задаче о раскрое. Это показывает, что анализ задачи имеет гораздо большее значение и более широкую область применений, чем может показаться на первый взгляд.

3. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОЦЕНОК ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

При анализе линейно-программной задачи о раскрое было установлено, что с оптимальным планом связаны и им обусловлены определенные оценки для каждого вида продукции и исходного ресурса (в рассмотренном примере 16 — для листа, 5 и 1 — соответственно для каждой заготовки). Остановимся подробнее на смысле этих оценок, так как помимо их значения как средства установления оптимальности плана и его нахождения они сами по себе играют очень большую роль.

Рассмотрение этой проблемы будем вести на примере той же задачи о раскрое, которая исследовалась в предыдущем параграфе. Поставим вопрос об оценках заготовок, точнее, установим, какой расход материала связан с каждой заготовкой. Даже если уже рассчитан оптимальный план, ответить на этот вопрос не так просто. Расходуя лист материала, мы получаем заготовки того и другого типа, но при этом еще совсем не ясно, какую долю листа следует отнести к одной, а какую — к другой заготовке, как обоснованно разделить затраты между ними. Мы постараемся показать, что такое обоснованное, оправданное распределение дают именно полученные выше оценки.

В согласии с этими оценками (16; 5; 1) следует считать, что расход на заготовку типа A составляет 5/16 листа, а расход на заготовку типа B — 1/16 листа. Первым подтверждением правильности такого подхода является то, что при обоих способах раскроя, использованных в оптимальном плане, расход на заготовки равен листу ($3 \cdot 5/16 + 1/16 = 1$; $2 \cdot 5/16 + 6/16 = 1$). Далее, если бы потребовалось увеличить число заготовок A, оставляя число заготовок B неизменным, достаточно увеличить на 6 число листов, раскраиваемых по первому способу, и уменьшить на единицу число листов, раскраиваемых по второму способу. За счет дополнительных пяти листов мы получили бы 16 заготовок A; расход на каждую — 5/16 листа. Изменяя число листов, раскраиваемых по первому и второму способам (оставляя общее число листов неизменным), можно увеличить число заготовок A за счет заготовок B в соотношении 1 : 5, т. е. соотношение оценок является вполне реальным и при нем, не нарушая условия оптимальности, возможно обменивать (заменять) заготовки в плане в указанном соотношении.

Следует напомнить еще раз, что о. о. оценки не являются совершенно неизменными. Существенное изменение условий производства (например, крупный сдвиг в структуре программы), как отмечалось при геометрическом анализе смысла оценок, может привести к их изменениям. Так, при сильном уменьшении потребности в заготовках типа A соотношение оценок становится иным (например, 7 : 2 вместо 5 : 1). Таким образом, о. о. оценки, во-первых, конкретны, связаны с конкретной обстановкой и, во-вторых, являются устойчивыми. Они реагируют лишь на крупные перемены, и при небольших изменениях в программе обычно можно пользоваться теми же оценками.

Подчеркнем еще раз объективную обусловленность оценок, т. е. тот факт, что они представляют объективно необходимые затраты на производство продукции в данных условиях. В любом реальном производстве не может случиться так, чтобы для набора продукции, который получается из единицы материала, оценка необходимых затрат материала оказалась больше единицы. Именно это реальное явление отражено свойством о. о. оценок, в соответствии с которым в способах, используемых в оптимальном плане, объективно обусловленные, необходимые затраты на получаемую продукцию должны быть в точности равны единице.

Укажем некоторые другие возможности применения о. о. оценок (помимо их использования в качестве характеристики оптимального плана и средства его нахождения). Может, например, оказаться необходимым то или иное изменение планового задания. Например, в запасе уже имеется 80 заготовок типа A и 48 заготовок типа B и, следовательно, их нужно изготовить меньше: A — 720 (800—80) и B — 352 (400—48). На основании оценок заготовок, не составляя нового плана, можно подсчитать число нужных листов, исходя из необходимых затрат на заготовки. Расчет покажет, что для выполнения измененного задания нужно 247 листов ($720 \cdot 5/16 + 352 \cdot 1/16$). Таким образом, оценки могут использоваться при варьировании балансов.

На основании о. о. оценок может быть определена эффективность использования некоторого нового, не предусматривавшегося при составлении плана способа раскроя. Для этого достаточно сравнить затраты в этом способе с необходимыми затратами (о. о. оценкой) получаемой продукции. Оценки полезны и в тех случаях, когда выявляется возможность замены продукции при использовании (например, если можно где-либо вместо одной заготовки A применить четыре заготовки B). Они позволяют установить, целесообразна ли такая замена для производства (в нашем примере она целесообразна: необходимые затраты уменьшатся с 5/16 до $4 \cdot 1/16$ листа).

Необходимо подчеркнуть, что именно правильное исчисление о. о. оценок и их связь с оптимальным планом определяют важные свойства и возможности использования этих оценок. При других способах расчета и других соображениях и условиях нельзя получить оценок подобного рода. Попытаемся, например, распределить затраты на заготовки пропорционально площадям этих заготовок (напомним, что заготовка типа A имела площадь 20 м^2, а типа B — 6 м^2), и, исходя из таких соображений, рассчитать расходы материала. В результате этого расчета будут получены 110/368 и 33/368. Однако можно убедиться, что эти оценки не обладают свойствами о. о. оценок. Исходя из них не удастся, например, рассчитать результат замены в плане заготовки A на заготовку B и т. д.

Те выводы, которые были сделаны при анализе задачи рационального раскроя о наличии и роли оценок, относятся, как указывалось, и к задачам, связанным с комплексным выпуском продукции, и, как мы увидим дальше, к оптимальным решениям в других экономических задачах. Эти выводы имеют принципиальное значение для экономического анализа.

Первый принципиальный вывод состоит в том, что хотя цены выступают реально в сфере обмена, они определяются условиями, которые складываются в производстве. В математической модели задачи о раскрое нет различных собственников, между которыми мог бы происходить обмен, и все экономические процессы осуществляются на основе единого хозяйственного плана, но все же в этой модели естественным образом возникли цены (оценки), и не только возникли, а оказались полезными и даже необходимыми.

Второй принципиальный вывод: есло цены (оценки) продукции правильно определены (согласованы с оптимальным планом, построены в соответствии с необходимыми затратами на продукцию), они становятся эффективным средством экономического анализа. Такие оценки позволяют получать решение тех или иных частных вопросов, связанных с реализацией плана, не рассматривая вновь план в целом. Это решение автоматически согласуется с общим планом, не нарушает, а поддерживает его оптимальный характер.

Важность такого вывода становится особенно очевидной, если учесть, что он относится не только к рациональному раскрою, а к широкому кругу планово-экономических задач. О. о. оценки оказываются здесь не только средством проверки качества (оптимальности) плана и вспомогательным инструментом для его расчета, но становятся также способом корректировки такого плана, учитывающие происходящие изменения, оценивающим эффективность отдельных производственных акций и решений с точки зрения всего народного хозяйства

Попробуйте представить себе экономику развитого социалистического общества, выпускающую сотни и тысячи видов продукции, использующую колоссальное количество производственных факторов на самых различных участках своего хозяйства. Как облегчилось бы принятие решений в таком хозяйстве, если бы они могли делаться по данным конкретного процесса с помощью оценок немногих входящих в него ингредиентов, а не посредством анализа и пересмотра всех показателей плана! Причем все принятые решения были бы доброкачественными, оптимальными с точки зрения всей экономики! Принципиальную возможность таких решений открывают о. о. оценки. Эти решения, принимаемые децентрализованно — на местах, участках социалистического производства, будут полностью согласованы с централизованным планом всего народного хозяйства. На основе о. о. оценок будут строиться локальные целевые функции для отдельных экономических звеньев, стимулирующие принятие решений, отвечающих интересам развития всей экономики.

Главное назначение о. о. оценок, этих цен оптимального плана — служить средством экономических измерений, орудием правильного сопоставления различных результатов и затрат. То обстоятельство, что оценки зависят от конкретных условий производства, является их достоинством, позволяет учитывать хозяйственную обстановку, реальные обстоятельства экономической жизни. Например, тот факт, что при увеличении потребности в некотором виде продукции оценка ее увеличивается, стимулирует, с одной стороны, рост производства такой продукции, а, с другой — заставляет снижать ее использование там, где она может быть заменена другой, недефицитной продукцией.

Мы встретимся дальше с построением и характеристикой о. о. оценок в различных экономических задачах и их использованием. Здесь же будет показана роль этих оценок в одной конкретной задаче, где их экономический смысл выступает более отчетливо, нежели в задаче о раскрое.

Итак, *задача о комплексном выпуске продукции*. Предположим, что на трех участках шахты совместно добывается коксующийся и энергетический уголь. Распределение добычи и средние затраты на одну тонну угля таковы:

Номер участка	Энергетический уголь, %	Коксующийся уголь, %	Затраты на 1 т, руб.
1	100	—	9
2	50	50	11
3	20	80	13

При таких условиях требуется получать в день 6000 т энергетического и 2000 т коксующегося угля. Опуская ход рассуждений, укажем решение задачи: на первом и втором участках надо добывать по 4000 т угля, тогда о. о. оценки будут 9 руб. для тонны энергетического и 13 руб. для тонны коксующегося угля. Каковы экономические последствия этого решения?

При ценах, установленных исходя из таких оценок (или с небольшой прибылью, скажем, 10%, т. е. 9 руб. 90 коп. и 14 руб. 30 коп.), на обоих участках добыча окажется экономически выгодной и план будет нормально выполняться. Посмотрим теперь, к каким экономическим последствиям привело бы установление цен по другому принципу, например: одна и та же цена для того и другого угля (в соответствии со средним уровнем затрат на первом и втором участках). Этот уровень, как легко сосчитать, равен 10 руб. и цена с 10%-ной прибылью должна составлять 11 руб. При такой цене шахте окажется выгодным форсировать добычу на первом участке и сокращать ее на втором. А это значит, что сократится добыча коксующегося угля и, чтобы выполнить план, придется прибегать к административным методам, которые малоэффективны, если не подкреплены экономическими стимулами.

В связи с рассмотренной задачей интересно обсудить проблему *замыкающих затрат* на топливо и электрическую энергию. Введем понятие замыкающего топлива — так называются те виды топлива, вовлечение которых в оптимальный план необходимо, но наименее экономично, добыча их сопряжена с наибольшими затратами. Например, если потребитель A получает по оптимальному плану уголь из двух бассейнов C и D с затратами, равными соответственно 11 руб/т и 12 руб/т, то уголь из бассейна D является для него замыкающим топливом. Он и определяет цену на уголь для потребителя A.

Под замыкающими затратами на топливо и электроэнергию понимается система удельных экономических показателей, представляющих собой реальные народнохозяйственные затраты на получение дополнительной единицы топлива и электроэнергии в каждом районе. С помощью этих обобщенных показателей может осуществляться согласование частного оптимума отдельной энергетической системы с глобальным оптимумом всего энергетического хозяйства страны.

Понятно, что роль замыкающих затрат аналогична роли объективно обусловленных оценок. По сути дела они позволяют сопоставить затраты, возникающие при добыче одного и того же топлива, но в разных бассейнах. На базе замыкающих затрат может быть обоснованно исчислена рента для бассейнов, находящихся в разных географических условиях. Так, в нашем примере для бассейна C следует установить ренту государству в размере 1 руб/т, что позволит поставить оба бассейна в экономически равные условия.

Мы сказали, что роль замыкающих затрат аналогична роли о. о. оценок. Более того. Если бы удалось построить линейно-программную модель всего народного хозяйства, адекватно учитывающую специфику энергетики, то решение двойственной к ней задачи определило бы посредством о. о. оценок замыкающие затраты. Однако в настоящее время, когда для расчетов приходится использовать более частные модели, можно говорить лишь о приближенном равенстве о. о. оценок и замыкающих затрат, понимая, впрочем, принципиальную близость их природы.

4. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Выше были подробно рассмотрены частные задачи линейного программирования. Теперь настало время познакомиться с общей постановкой этой задачи. Построим математическую модель организации производства. В этом производстве участвуют m различных производственных факторов (ингредиентов) — рабочая сила, сырье, материалы, оборудование, конечные и промежуточные продукты и др. Производство использует S технологических способов, причем для каждого из них заданы объемы производимых ингредиентов, рассчитанные на реализацию этого способа с единичной интенсивностью, т. е. задан вектор $a_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})$, $k = 1, 2, \ldots, S$, в котором каждая из компонент a_{ik} указывает объем производства соответствующего (i-го) ингредиента, если она положительна, и объем его расходования, если она отрицательна (в способе k).

Выбор плана означает указание интенсивностей использования различных технологических способов, т. е.

план определяется вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_S)$ с неотрицательными компонентами.

Для каждого плана x легко подсчитать балансы по каждому из ингредиентов. Эти балансы являются компонентами вектора

$$\sum_{k=1}^{S} x_k a_k = \left(\sum_{k=1}^{S} a_{1k} x_k; \sum_{k=1}^{S} a_{2k} x_k ; \ldots ; \sum_{k=1}^{S} a_{mk} x_k \right)$$

(положительная компонента — объем производства (выпуска) ингредиента, отрицательная компонента — объем затрат ингредиента).

Обычно на количества выпускаемых и затрачиваемых ингредиентов накладываются ограничения: производить нужно не меньше, чем требуется, а затрачивать не больше, чем имеется. Такие ограничения записываются в виде

$$\sum_{k=1}^{S} a_{ik} x_k \geqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Если $b_i \geqslant 0$, то неравенство означает, что имеется потребность в ингредиенте в размере b_i; если $b_i \leqslant 0$, то неравенство означает, что имеется ресурс данного ингредиента в размере $-b_i = |b_i|$.

Далее предполагается, что использование каждого способа связано с расходом одного из перечисленных ингредиентов или особо выделенного ингредиента в количестве C_k при единичной интенсивности способа a_k. В качестве целевой функции принимается суммарный расход этого ингредиента в плане

$$f(x) = \sum_{k=1}^{S} C_k x_k.$$

Теперь общая задача линейного программирования может быть представлена в математической форме.

Для заданных чисел a_{ik}, C_k и b_i найти

$$\min \sum_{k=1}^{S} C_k x_k$$

при условиях

$$(1) \qquad x_k \geqslant 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, S,$$

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{S} a_{ik} x_k \geqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

План, удовлетворяющий условиям (1) и (2), является допустимым, а если в нем, кроме того, достигается минимум целевой функции, то этот план оптимальный.

Итак, задача состоит в отыскании минимума линейной функции при линейных ограничениях, или, иначе говоря, минимума этой функции на выпуклом многограннике допустимых планов. Признак оптимальности плана формулируется в виде такой теоремы.

Для оптимальности допустимого плана x необходимо и достаточно существование вектора

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

удовлетворяющего условиям

$$(1) \qquad y_i \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i \leqslant C_k, \quad k = 1, 2, \ldots, S,$$

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i = C_k, \text{ если } x_k > 0,$$

$$(4) \qquad y_i = 0, \text{ если } \sum_{k=1}^{S} a_{ik} x_k > b_i.$$ [1]

---

[1] Доказательство теоремы.

Пусть вектор $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_s)$ представляет собой какой-то допустимый план. Подсчитаем значение целевой функции для плана x'; используя условие (2) признака оптимальности, имеем

$$\sum_{k=1}^{S} C_k x'_k \geqslant \sum_{k=1}^{S} x'_k \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ik} = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{k=1}^{S} a_{ik} x'_k.$$

Так как план допустим, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{k=1}^{S} a_{ik} x'_k \geqslant \sum_{i=1}^{m} y_i b_i.$$

Компоненты вектора y можно рассматривать как о. о оценки для всех видов ингредиентов. На «языке» этих оценок все условия теоремы имеют прозрачный экономический смысл: (1) оценка каждого ингредиента неотрицательна; (2) для каждого возможного способа получаемый эффект, который выражается алгебраической суммой оценок произведенных и затраченных ингредиентов, не превосходит C_k — расхода, связанного с применением способа; (3) в оптимальный план могут включаться только такие технологические способы, для которых суммарная алгебраическая оценка получаемой продукции равна расходу C_k; (4) ингредиенты, получаемые в оптимальном плане с избытком, имеют нулевые оценки.

Очень важно отметить, что вектор оценок y, соответствующий оптимальному плану, сам является решением двойственной задачи линейного программирования, которая формулируется следующим образом.

Для заданных чисел a_{ik}, b_i, C_k найти

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} b_i y_i\right\}$$

при условиях

$$(1') \qquad y_i \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$(2') \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i \leqslant C_k, \quad k = 1, 2, \ldots, S.$$

Из условия допустимости плана x и условий (4) и (3) следует

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{k=1}^{S} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{S} x_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i = \sum_{k=1}^{S} C_k x_k.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{S} C_k x'_k \geqslant \sum_{k=1}^{S} C_k x_k,$$

т. е. план x оптимален, так как любому допустимому плану соответствует не меньшее значение целевой функции, чем плану x. Доказательство необходимости условия теоремы, т. е. наличия оценок, согласованных с планом, не приводим.

Читатель, внимательно ознакомившийся с объяснением того, как составлялась двойственная задача к задаче раскроя (см. стр. 2—23), без труда сможет установить экономический смысл этих отношений.

Связь между прямой и двойственной задачами линейного программирования характеризуется тем, что если одна из них имеет решение, то разрешима и другая. При этом для оптимальных планов этих двух задач справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{S} C_k x_k = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Это утверждение носит название теоремы двойственности.

Использование теоремы двойственности и связанного с ней признака оптимальности допустимого плана лежит в основе большинства эффективных методов решения задач линейного программирования. В § 2 был описан один из них — метод последовательного улучшения плана. Близко к нему примыкает *симплекс-метод*, разработанный американским математиком Дж. Данцигом. Приведем краткое описание этого метода.

В постановке задачи линейного программирования каждое неравенство

$$\sum_{k=1}^{S} a_{ik} x_k \leqslant b_i$$

может быть заменено на равенство прибавлением к левой части вновь вводимой неотрицательной переменной

$$\sum_{k=1}^{S} a_{ik} x_k + x_{S+i} = b_i, \ x_{S+i} \geqslant 0.$$

Полагая, что $n = S + m$ и $C_{S+i} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), получаем возможность рассматривать задачу линейного программирования (благодаря увеличению числа переменных) в следующей канонической форме: найти

$$\min \sum_{i=1}^{n} C_i x_i$$

при условиях

$$(1) \qquad x_i \geqslant 0,$$

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Предположим, что уже имеется допустимый план x, причем такой, что способы, используемые в нем, являются базисными векторами (такой план называется *опорным*) [1]. Можно считать, что базис состоит из первых m векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, так как этого всегда можно добиться изменением нумерации способов. Поскольку всякий вектор m-мерного пространства можно разложить по этому базису, найдем разложения всех векторов способов и вектора ограничений. Коэффициенты этих разложений объединены в табл. 3 (так называемая *симплексная таблица*).

ТАБЛИЦА 3

	a_1	a_2	$\ldots$	a_m	a_{m+1}	$\ldots$	a_n	b
a_1	1	0	$\ldots$	0	x_{1m+1}	$\ldots$	x_{1n}	x_1
a_2	0	1	$\ldots$	0	x_{2m+1}	$\ldots$	x_{2n}	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\ldots$	0				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a_m	0	0	$\ldots$	1	x_{mm+1}	$\ldots$	x_{mn}	x_m

---

[1] Мы говорим, что m векторов m-мерного векторного пространства образуют *базис*, если они линейно независимы, т. е. ни один из них не может быть выражен через другие. Тогда всякий вектор x пространства может быть единственным образом выражен через векторы базиса $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_m a_m$, где величины ξ_k — коэффициенты разложения.

В частности, для самих базисных векторов записаны их очевидные разложения типа

$$a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_m,$$

для небазисных векторов

$$a_{m+1} = x_{1m+1} a_1 + x_{2m+1} a_2 + \ldots + x_{km+1} \cdot a_m,$$

где x_{km+1} — коэффициенты разложения. Наличие разложения $b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_m a_m$ для вектора $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ с неотрицательными x_k вытекает из предположения, что план x допустимый.

Процедура симплекс-метода состоит из двух этапов.

1. Проверка плана на оптимальность.

2. Включение рентабельных способов и вытеснение из базиса нерентабельных способов.

Базисность допустимого плана означает, что любой способ, не используемый в этом плане, можно выразить через используемые способы. Пусть производственный способ a_S не был включен в план. Тогда его можно «синтезировать» из базисных способов, т. е. $a_S = \sum_{i=1}^{m} x_{iS} a_i$. Расход α_S для этого «синтетического» способа определяется равенством $\alpha_S = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{iS}$. Если «синтетический» способ дороже, чем способ a_S, то целесообразно заменить его способом a_S путем введения последнего в базис. Пусть способ a_S вводится в базис с интенсивностью θ. Для того чтобы не нарушались балансовые соотношения, нужно изменить интенсивность, с которой применяются остальные способы. Из написанного выше разложения a_S ясно, что интенсивность x_i, с которой применялся способ a_i, следует уменьшить на величину θx_{iS}. Так как интенсивности не могут быть отрицательными, нужно обеспечить выполнение неравенств

$$x_i - \theta x_{iS} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Отсюда следует, что $\theta \leqslant \frac{x_i}{x_{iS}}$. Ясно, что наибольшее допустимое θ есть $\theta = \min_i \frac{x_i}{x_{iS}}$. Допустим, что минимум этот достигается при $i = l$, т. е. $\theta = \frac{x_l}{x_{ls}}$. Принимая такую интенсивность для вновь вводимого способа a_S, получим, что $x_l - \frac{x_l}{x_{ls}} x_{ls} = 0$, т. е. способ a_l применяется с нулевой интенсивностью — выводится из базиса. Таким образом, построен новый, лучший план.

Приступим теперь к более формальному описанию симплекс-метода. Для каждого небазисного способа можно сравнить два числа

$$C_k \text{ и } \alpha_k = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ik}.$$

Из критерия оптимальности ясно, что план x оптимален тогда и только тогда, когда $C_k \geqslant \alpha_k$ для всех k. Действительно, если для какого-нибудь k выполняется неравенство $\alpha_k > C_k$, то план неоптимален и способ a_k целесообразно ввести в новый базис. Если таких k несколько, то естественно ввести один из них, например, тот, для которого разность $\alpha_k - C_k$ максимальна. Пусть он соответствует $k = S$.

Для того чтобы новый допустимый план был опорным, необходимо исключить один из использовавшихся способов, так как $m + 1$ векторов в m-мерном пространстве всегда линейно зависимы и базиса не образуют. Подсчитаем величину $\theta = \min_i \frac{x_i}{x_{iS}}$, где индекс i соответствует положительным компонентам плана. В силу предположения, сделанного выше, $\theta = \frac{x_l}{x_{lS}}$ Тогда исключить из базиса следует именно способ a_l и новому плану будет соответствовать базис $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_{l+1}, \ldots, a_m, a_S$.

Теперь покажем, как перейти от плана x к лучшему допустимому плану x'. Раскладывая вектор ограничений по новому базису, имеем

$$b = x_1' a_1 + x_2' a_2 + \ldots + x_{l-1}' a_{l-1} + x_{l+1}' a_{l+1} + \ldots +$$
$$+ x_m' a_m + x_S' a_S.$$

С другой стороны, используя имевшиеся ранее разложения векторов b и a_l, тот же вектор b можно представить в таком виде

$$b=\left(x_1-\frac{x_l}{x_{lS}}x_{1S}\right)a_1+\ldots+\left(x_{l-1}-\frac{x_l}{x_{lS}}x_{l-1S}\right)a_{l-1}+\ldots$$
$$+\left(x_m-\frac{x_l}{x_{lS}}x_{mS}\right)a_m+\frac{x_l}{x_{lS}}a_S.$$

Отсюда следует, что новый план может быть вычислен по формулам

$$x_i'=x_i-\frac{x_l}{x_{lS}}x_{iS},\quad i=1,2,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m;$$
$$x_S'=\frac{x_l}{x_{lS}}.$$

Важно отметить, что x_i' неотрицательны. Это ясно из выбора θ. Совершенно аналогичные формулы можно получить и для преобразования всех элементов симплексной таблицы (табл. 3)

$$x_{ij}'=x_{ij}-\frac{x_{lj}}{x_{lS}}x_{iS},\quad i=1,2,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m;$$
$$x_{lj}'=\frac{x_{lj}}{x_{lS}}.$$

Отысканием нового плана и преобразованной таблицы завершается одна итерация симплекс-метода. Далее этапы проверки и улучшения повторяются снова. Доказано, что если оптимальное решение задачи существует, то оно будет найдено через конечное число шагов (за исключением редко встречающихся случаев *вырождения*, требующих некоторого изменения алгорифма)[1].

В качестве иллюстрации применим симплекс-метод к решению конкретной задачи. Найти

$$\max\{x_1-2x_2+x_3\}$$

---

[1] Описание метода исходило из предположения, что допустимый план существует. Правильно поставленная задача действительно обычно имеет решение, однако трудности нередко возникают при отыскании допустимого опорного плана. В таких случаях используется *метод искусственного базиса*, связанный с введением в задачу дополнительных способов.

при условиях

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 5,$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = -1,$$

$$x_i \geqslant 0;\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

Здесь

$$a_1 = (1,\ 1),\ a_2 = (4,\ -2),\ a_3 = (1,\ -1),\ b = (5,\ -1),$$
$$C_1 = 1,\ C_2 = -2 \text{ и } C_3 = 1.$$

Эта задача отличается от рассматривавшейся задачи линейного программирования в канонической форме тем, что в ней требуется отыскать максимум, а не минимум. Понятно, что план x такой задачи оптимален тогда и только тогда, когда $C_k \leqslant \alpha_k$ для всех k. Начнем с выбора допустимого начального плана. Сразу видно, что допустимым является план $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Этот план опорный, так как векторы a_1 и a_2 линейно независимы — образуют базис.

Построим симплексную таблицу (табл. 4), найдя разложения по этому базису векторов a_3 и b.

ТАБЛИЦА 4

	a_1	a_2	a_3	b
a_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	1
a_2	0	1	$\frac{1}{3}$	1

Вычислим величину

$$\alpha_3 = x_{13}C_1 + x_{23}C_2 = -\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}(-2) = -1.$$

Разность $\alpha_3 - C_3 = -1 - 1 = -2 < 0$, следовательно, исходный план неоптимален. Для того чтобы его улучшить, необходимо ввести в базис вектор a_3. Так как мы хотим, чтобы и новый план был опорным, один из прежних векторов базиса должен быть из него исключен.

Разложение вектора a_3 по базису содержит лишь одну положительную компоненту. Следовательно,

$$\theta = \frac{x_2}{x_{23}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Пользуясь приведенными выше формулами, определяем новый план. Имеем

$$x_1' = 1 - 3\left(-\frac{1}{3}\right) = 2,$$

$$x_2' = 1 - 3\left(\frac{1}{3}\right) = 0,$$

$$x_3' = 3.$$

Проверим вновь полученный план на оптимальность. Дл этого строим новую симплексную таблицу (табл. 5), и пользуя соответствующие формулы преобразования.

ТАБЛИЦА 5

	a_1	a_2	a_3	b
a_1	1	1	0	2
a_3	0	3	1	3

Величина $\alpha_2 = x_{12}C_1 + x_{32}C_3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4$, а разность $\alpha_2 - c_2 = 4 + 2 = 6 > 0$. Следовательно, новый план $x = (2, 0, 3)$ оптимален. Значение целевой функции в этом плане равно $z_1 = 2 - 2 \cdot 0 + 3 = 5$. (Сравните: в первоначальном плане значение целевой функции равнялось $z_0 = 1 - 2 \cdot 1 = -1$.) Задача решена.

Описанный вариант симплекс-метода не является единственным. На практике обычно употребляется более совершенный вариант — модифицированный симплекс-метод, связанный с использованием двойственной задачи (о. о. оценок). Существуют и другие методы решения задач линейного программирования. Упомянем и коротко поясним один из них — *метод блочного программирова-*

ния, или, как его еще называют, *принцип разло жения*.

При решении задач линейного программирования большой размерности постоянно приходится иметь в виду следующие два обстоятельства. Во-первых, решение задач с большим числом переменных и ограничений ведет к частому использованию устройств внешней памяти ЭВМ, которые характеризуются относительно невысоким быстродействием, что в конечном счете приводит к значительному расходу машинного времени. Во-вторых, очень часто возникающие из нужд практики задачи обладают той или иной специальной структурой (матрица ограничений симметрична, имеет блочную структуру, содержит много нулей и т. п.). Хотя сама задача в этом случае и не может быть решена с помощью специальных методов решения, но отдельные ее части — задачи меньшего объема — могут быть эффективно разрешены с помощью некоторых специальных методов.

Так вот, метод блочного программирования основан на разложении исходной задачи на отдельные подзадачи — блоки, для решения которых могут быть применены различные специальные методы в зависимости от вида блоков, и главную задачу — координирующую программу, которая связывает между собой все эти подзадачи. Такое разбиение делает возможным разновременное решение отдельных частей исходной задачи и позволяет тем самым меньше пользоваться внешней памятью ЭВМ. Многие задачи очень большой размерности, которые «не влезают» в современные машины, удалось впервые решить именно с помощью блочного программирования.

У этого метода довольно ясный экономический смысл. Если каждая подзадача характеризует деятельность одного предприятия некоторой отрасли, а координирующая программа содержит ограничения, относящиеся ко всем ресурсам в этой отрасли, то процесс решения примерно таков. Прежде всего решается главная задача и на основе этого решения строятся целевые функции для подзадач. Далее, порознь решаются все подзадачи, причем каждая имеет свою целевую функцию. На основании этих решений вносятся коррективы в главную задачу, и процесс повторяется снова. Доказано, что после конечного числа итераций принцип разложения приводит к оптимальному плану исходной задачи, если таковой существует.

В связи с решением задач большого объема следует отметить важность алгорифмического описания производственных способов. Поясним, что это означает. Для решения задачи линейного программирования в ЭВМ помимо алгорифма решения должны быть введены все производственные способы. Хранятся они в специальном запоминающем устройстве, носящем название памяти машины. Как правило, ЭВМ имеет два типа памяти — оперативную и внешнюю (магнитные барабаны, ленты), различающиеся скоростями воспроизведения имеющейся в них информации. Оперативная память обладает гораздо бо́льшим быстродействием, поэтому в целях экономии машинного времени желательно как можно больше информации держать именно в оперативной памяти. Если способов много и каждый из них описан индивидуально, то этот объем информации может быть настолько велик, что даже не поместится в память машины. Если же в ЭВМ введен алгорифм, правило, по которому она сама может по мере необходимости формировать способы, то это значительно повышает эффективность использования памяти ЭВМ, расширяет круг решаемых задач.

Наличие универсальных эффективных методов решения задач линейного программирования, носящих ясно выраженный алгорифмический характер (характер четкого предписания), позволяет успешно программировать и реализовать их решение на ЭВМ. Имеется большой набор программ для этой цели, дающих возможность решать задачи с числом ограничений порядка 100 и более и с сотнями и тысячами переменных (способов). Решение требует нескольких минут (иногда часов) машинного времени. Задачи меньшего объема теми же методами могут успешно решаться и вручную с применением настольных счетных машин.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОТДЕЛЬНЫХ КЛАССОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В первой главе были рассмотрены некоторые методы решения общей задачи линейного программирования. На практике, однако, нередко приходится иметь дело не с самой общей задачей, а со специальными видами задач, порожденными отдельными классами экономических моделей. Конечно, для поиска оптимальных решений в этих моделях могут использоваться и общие методы, однако, как правило, более выгодно при решении этих задач учитывать их специфику.

Рассмотрению некоторых важных классов таких задач и специальных методов их решения посвящена данная глава.

1. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

В современной экономике большую роль играют проблемы, связанные с транспортировкой грузов. Они обусловлены удаленностью источников сырья от пунктов производства, пунктов производства от пунктов потребления и другими объективными факторами. Затраты на перевозки всех видов грузов всеми видами транспорта в целом по стране составляют более 20 млрд. руб. Столь большой объем затрат дает основание полагать, что при правильном решении вопросов, связанных с использованием транспорта, особенно учитывая, с одной стороны, разнообразие его видов, богатство природных условий, сложность схем перевозок, дальность расстояний, а с другой — дефицитность транспортных средств и их загруженность, можно ожидать существенного сокращения этих затрат. Такое предположение подтверждается и значительным уже опытом применения математических методов планирования на транспорте.

Остановимся на некоторых характерных особенностях транспортных задач. Прежде всего — проблема оптимальности. Что значит транспорт работает хорошо? Один из основных показателей работы транспорта — грузооборот — измеряется в тонно-километрах. Получается, если транспортная организация «выполнила» много тонно-километров, то она работала хорошо. А ведь оптимальная система перевозок, несомненно, приносящая пользу государству, ведет к сокращению этого показателя и тем самым ухудшает показатели работы организации. Можно, конечно, измерять качество работы по затратам при существующих тарифах и пытаться, планируя перевозки, минимизировать эти затраты. Но тогда сразу же возникает вопрос о правильном, научно обоснованном исчислении тарифов.

Очень эффективно, например, было бы оптимально планировать совместную деятельность сразу нескольких видов транспорта. Но возникающая при этом математическая задача будет иметь весьма большой размер, что, естественно, затруднит поиск оптимального решения, и без того осложненного тем, что такая задача «принадлежит разным ведомствам». В общем здесь есть еще немало вопросов, ждущих своего решения с помощью точных математических методов.

К задаче транспортировки грузов тесно примыкают и *задачи оптимальной маршрутизации*. Краткая характеристика их такова. Пусть речь идет о перевозке различных грузов между несколькими пунктами погрузки и разгрузки, причем адреса перевозок указаны заранее. Тогда дело сводится к определению того, куда нужно перебрасывать высвободившиеся вагоны или автомашины, чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальны, т. е. чтобы минимизировалось количество «холостых» рейсов (о решении этих проблем на основе модели транспортной задачи см. стр. 55).

Обсудив некоторые общие свойства транспортных проблем, построим математическую модель, описывающую одну довольно простую, но типичную ситуацию. Речь будет идти о рациональной перевозке некоторого однородного (одного и того же назначения и качества) продукта от производителей к потребителям. В этом случае каждому потребителю безразлично, откуда, из каких пунктов производства будет поступать этот продукт, лишь бы он поступал в нужном объеме. Однако от того, насколько рациональным окажется прикрепление пунктов потребления к пунктам производства, существенно зависит объем транспортной работы. В связи с этим, естественно, возникает вопрос о наиболее рациональном прикреплении производителей к потребителям (и наоборот), о правильном направлении перевозок груза, при котором потребности удовлетворяются, а затраты на транспортировку минимальны.

Пусть имеются пункты производства $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с объемами производства в единицу времени (месяц, квартал), равными соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и пункты потребления $B_1, B_2, \ldots, B_m$ с объемами потребления, равными $b_1, b_2, \ldots, b_m$ соответственно. Будем предполагать, что производство и потребление сбалансированы — сумма объемов производства равна сумме объемов потребления, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Предполагаются известными величины C_{ij} — затраты по перевозке единицы продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Они могут быть выражены в стоимостной (денежной) форме или в натуре (например, в тонно-километрах). Требуется найти такой план перевозок, при котором были бы удовлетворены потребности в пунктах $B_1, B_2, \ldots, B_m$ и при этом суммарные затраты на перевозку были бы минимальны.

Обозначая через x_{ij} количество продукта, перевозимое из i-го пункта производства в j-й пункт потребления, приходим к следующей математической формулировке задачи.

Найти минимум

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} x_{ij} \qquad (*)$$

(суммарные затраты на транспортировку)
при условиях

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

(в каждый пункт потребления завозится требуемое количество продукта);

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

(из каждого пункта производства полностью вывозится произведенный продукт);

$$(3) \qquad x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

(перевозимый объем продукта не может быть отрицательным).

Всякий набор величин x_{ij} ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$), удовлетворяющих условиям (1) — (3), будем называть допустимым планом перевозок. План, для которого суммарные затраты достигают минимума, называется оптимальным.

Поскольку транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования, для нее справедлив приведенный ранее критерий оптимальности плана. Используя терминологию и особенности транспортной задачи, этот критерий можно сформулировать таким образом: допустимый план перевозок тогда и только тогда является оптимальным, когда каждому пункту производства и потребления можно сопоставить величину, характеризующую уровень оценки продукции в нем так, что множество этих потенциалов удовлетворяет следующим условиям: (1) разность оценок пунктов потребления и производства, между которыми запланированы перевозки, равна затратам по транспортировке единицы продукта между этими пунктами; (2) аналогичные разности для всех остальных пар пунктов не превосходят затрат по транспортировке.

Если ввести обозначения: U_i—потенциал для i-го пункта производства и V_j—потенциал для j-го пункта потребления, то эти условия можно представить как

$$V_j - U_i \leqslant C_{ij},$$

причем $V_j - U_i = C_{ij}$, если перевозка из пункта A_i в пункт B_j предусмотрена в плане ($x_{ij} > 0$).

В транспортной задаче оценки или, как их чаще называют в этом случае, потенциалы имеют особенно прозрачный экономический смысл. Они выступают здесь как локальные (поясные) цены (или наценки к единой цене), создающие заинтересованность в правильном направлении перевозок. При такой интерпретации признак оптимальности плана представляет собой по сути математическое выражение здравого смысла — если какая-то перевозка осуществляется, то цена в пункте потребления равна цене в пункте производства плюс транспортные затраты; в остальных случаях цена V_j не может быть больше, чем $U_i + C_{ij}$, так как продукт в пункте B_j по такой цене можно было бы получить, привезя его с затратами C_{ij} из пункта A_i. Следовательно, $V_j \leqslant U_i + C_{ij}$, т. е. в обоих указанных случаях разность цен не превышает затрат по перевозке. С помощью критерия оптимальности, так же как и в задаче о раскрое, можно не только проверить на оптимальность любой план, но и в случае его неоптимальности указать способ улучшения этого плана.

Рассмотрим теперь процесс формирования оптимального плана транспортной задачи. Возьмем конкретный числовой пример и, применив метод последовательного улучшения, детально покажем, как строится такой план.

Пусть заданы объемы производства $a_1 = 95$, $a_2 = 55$, $a_3 = 50$ и объемы потребления $b_1 = 48$, $b_2 = 54$, $b_3 = 31$, $b_4 = 37$ и $b_5 = 30$. Затраты на перевозки записаны в табл. 6 в виде матрицы. Например, число 90 означает, что перевозка единицы продукта из пункта A_1 в пункт B_1 обходится в 90 единиц (скажем, эти числа могут означать расстояния между пунктами; если объем дан в тоннах, затраты выражаются в тонно-километрах).

ТАБЛИЦА 6

	$B_1(48)$	$B_2(54)$	$B_3(31)$	$B_4(37)$	$B_5(30)$
A_1 (95)	90	84	72	56	46
A_2 (55)	39	43	66	40	55
A_3 (50)	41	54	45	38	36

Решение задачи начнем с построения некоторого допустимого плана. Вообще говоря, это можно сделать разными способами, и мы воспользуемся одним из них. В матрице затрат отыскиваем минимальный элемент (в данном примере 36) и включаем в план в максимально возможном объеме самую дешевую перевозку, притом в максимально возможном объеме (в нашем примере это перевозка 30 единиц из пункта A_3 в пункт B_5). Следующий по величине элемент матрицы затрат (38) определяет включение в план перевозки между пунктами A_3 и B_4. Объем перевозки равен только 20 единицам, так как этим количеством груза исчерпываются возможности предприятия, расположенного в пункте A_3. Продолжая действовать аналогично и дальше, придем к плану перевозок, показанному в табл. 7. Этот план допустим· суммы строк соответствуют объемам производства, а столбцов — объемам потребления. Затраты на его реализацию составляют: $54 \cdot 84 + 31 \cdot 72 + 10 \cdot 56 + 48 \cdot 39 + 7 \cdot 40 + 20 \cdot 38 + 30 \cdot 36 = 11\,320$.

ТАБЛИЦА 7

	B_1 (48)	B_2 (54)	B_3 (31)	B_4 (37)	B_5 (30)
A_1 (95)	0	54	31	10	0
A_2 (55)	48	0	0	7	0
A_3 (50)	0	0	0	20	30

Для того чтобы проверить полученный план на оптимальность, прежде всего вычисляем систему потенциалов (оценок единицы продукта) в пунктах производства (U_1, U_2, U_3) и пунктах потребления (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5). Так как потенциалы определяются с точностью до постоянного слагаемого, какой-нибудь из них можем задать заранее. Пусть, например, $U_1 = 100$ и связи производителей с потребителями в плане осуществляются по направлениям, которые указаны на рис. 5. Тогда, зная, что раз-

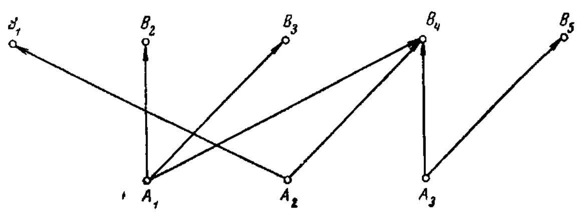


Рис. 5

ности потенциалов между пунктами потребления и пунктами производства, связанными в плане, равны соответствующим транспортным затратам, один за другим находим остальные потенциалы:

$$
\begin{array}{ll}
U_1 = 100 & U_2 = 156 - 40 = 116 \\
V_2 = 100 + 84 = 184 & U_3 = 156 - 38 = 118 \\
V_3 = 100 + 72 = 172 & V_5 = 118 + 36 = 154 \\
V_4 = 100 + 56 = 156 & V_1 = 116 + 39 = 155
\end{array}
$$

Проверим выполнение признака оптимальности. Для этого, согласно условию (2), нужно подсчитать величины $V_j - U_i - C_{ij}$. Если они все меньше или равны нулю, то план оптимален. Несоблюдение этого требования означает, что план может быть улучшен. Находим

$$
\begin{array}{l}
V_1 - U_1 - C_{11} = 155 - 100 - 90 = -35 \\
V_5 - U_1 - C_{51} = 154 - 100 - 46 = 8 \\
V_2 - U_2 - C_{22} = 184 - 116 - 43 = 25 \\
V_3 - U_2 - C_{23} = 172 - 116 - 66 = -10 \\
V_5 - U_2 - C_{25} = 154 - 116 - 55 = -17 \\
V_1 - U_3 - C_{31} = 155 - 118 - 41 = -4 \\
V_2 - U_3 - C_{32} = 184 - 118 - 54 = 12 \\
V_3 - U_3 - C_{33} = 172 - 118 - 45 = 9
\end{array}
$$

Для пунктов, между которыми предусмотрены перевозки, эти разности, очевидно, отвечают признаку оптимальности. Но так как некоторые из полученных величин положительны, весь план не оптимален. Чтобы его улучшить, введем в план перевозку в объеме θ между какими-нибудь пунктами A_i и B_j, для которых соответствующая разность положительна. Логичнее всего ввести эту перевозку между пунктами A_2 и B_2, так как для них величина разности наиболее значительна (25). Введение добавочной перевозки нарушает сбалансированность плана, т. е. объем ввоза (вывоза) в пункт не соответствует потреблению (производству) в нем. Поэтому необходимо одновременно изменить объемы перевозок и между некоторыми другими пунктами. Эти изменения следует произвести по направлениям B_2A_1, A_1B_4 и B_4A_2, т. е. согласно тем связям, по которым производилось определение потенциалов (см. рис. 5). В табл. 8 приведен план, в котором осуществлены все необходимые изменения в объемах перевозок.

Нетрудно проверить, что этот план сбалансирован —

ТАБЛИЦА 8

	B_1 (48)	B_2 (54)	B_3 (31)	B_4 (37)	B_5 (30)
A_1 (95)	0	$54-\theta$	31	$10+\theta$	0
A_2 (55)	48	θ	0	$7-\theta$	0
A_3 (50)	0	0	0	20	30

из каждого пункта вывозится столько, сколько в нем производится, а каждый пункт потребления удовлетворяет всю свою потребность. Легко убедиться, что затраты по реализации этого плана перевозок меньше первоначальных на величину $(V_2 - U_2 - C_{22})\,\theta = 25\theta$. Следовательно, выгодно выбрать θ как можно большим. Учитывая, что объемы перевозок не могут быть отрицательными, наибольшее из возможных значений θ равно 7. Полагая $\theta = 7$, находим новый допустимый экономически более выгодный план. Он приведен в табл. 9.

ТАБЛИЦА 9

	B_1 (48)	B_2 (54)	B_3 (31)	B_4 (37)	B_5 (30)
A_1 (95)	0	47	31	17	0
A_2 (55)	48	7	0	0	0
A_3 (50)	0	0	0	20	30

Нахождением нового допустимого плана заканчивается, как говорят математики, первое приближение (первая итерация). Дальше аналогичные операции проводятся снова, но уже для нового плана. Прежде всего вычисляются потенциалы, проверяются условия оптимальности. Если они выполнены, то решение закончено. Если нет, то снова производится переход к лучшему плану и т. д.

Для окончательного решения задачи требуется выполнить еще три итерации. Чтобы не увеличивать объема книги, эти итерации здесь не приводятся. Если же читатель заинтересуется дальнейшим ходом решения, он может

ТАБЛИЦА 10

	B_1 (48)	B_2 (54)	B_3 (31)	B_4 (37)	B_5 (30)
A_1 (95)	0	0	28	37	30
A_2 (55)	1	54	0	0	0
A_3 (50)	47	0	3	0	0

сам проделать все необходимые расчеты и сравнить свой результат с оптимальным планом, приведенным в табл. 10.

Чтобы убедиться в оптимальности этого плана, нужно снова вычислить потенциалы пунктов производства и пунктов потребления, а затем удостовериться, что величины $V_j - U_i - C_{ij} \leqslant 0$. Приведем эти вычисления:

$U_1 = 100$ $\quad V_1 - U_1 - C_{11} = 168 - 100 - 90 = -22$

$V_3 = 100 + 72 = 172$ $\quad V_2 - U_1 - C_{12} = 172 - 100 - 84 = -12$

$V_4 = 100 + 56 = 156$ $\quad V_3 - U_2 - C_{23} = 172 - 129 - 66 = -23$

$V_5 = 100 + 46 = 146$ $\quad V_4 - U_2 - C_{24} = 156 - 129 - 40 = -13$

$U_3 = 172 - 45 = 127$ $\quad V_5 - U_2 - C_{25} = 146 - 129 - 55 = -38$

$V_1 = 127 + 41 = 168$ $\quad V_2 - U_3 - C_{32} = 172 - 127 - 54 = -9$

$U_2 = 168 - 39 = 129$ $\quad V_4 - U_3 - C_{34} = 156 - 127 - 38 = -9$

$V_2 = 129 + 43 = 172$ $\quad V_5 - U_3 - C_{35} = 146 - 127 - 36 = -17$

Все же остальные значения $V_j - U_i - C_{ij}$ равны нулю. Следовательно, в силу критерия оптимальности найденный план — наилучший, оптимальный. Затраты на его реализацию составляют $28 \cdot 72 + 37 \cdot 56 + 30 \cdot 46 + 39 \cdot 1 + 43 \cdot 54 + 47 \cdot 41 + 45 \cdot 3 = 9891$.

По сравнению с первым допустимым планом, который представлялся на первый взгляд также весьма разумным, затраты в оптимальном плане уменьшились примерно на 13%.

Мы рассмотрели транспортную задачу в матричной, или «шахматной» постановке. Такое название этой постановки связано с тем, что информация о расстояниях и грузопотоках задана в виде «шахматной» таблицы-матрицы. Нередко, однако, приходится сталкиваться и с другой формой транспортной задачи — транспортной задачей в сетевой постановке. Если при матричной постановке задачи предполагаются известными затраты по транспортировке единицы продукта из каждого j-го пункта производства в i-й пункт потребления, то при сетевой постановке указываются затраты по перевозке на отдельных участках сети, а полные затраты получаются в результате суммирования. Поэтому при использовании различных путей, соединяющих пункты, затраты различны. Здесь в ходе решения определяются не только объемы, но и маршруты перевозок. Доказано, что обе постановки транспортной задачи эквивалентны, т. е. можно перейти от одной к другой

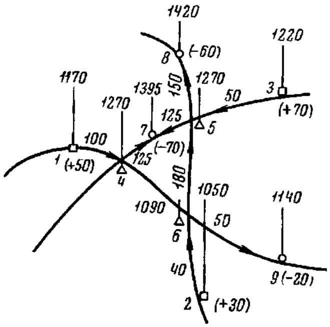


Рис. 6

и решение при этом не изменится. Тем не менее необходимости в таком переходе нет, так как метод потенциалов применим и к задаче в сетевой постановке.

Рассмотрим, например, транспортную задачу в конкретных условиях, приведенных на рис. 6. Пункты производства на нем обозначены прямоугольниками, пункты потребления — кружками, а промежуточные пункты — треугольниками. Числа в скобках со знаком плюс указывают объемы производства, со знаком минус — объемы потребления, а числа, стоящие возле участков пути, выражают транспортные затраты по перевозке единицы продукта между соответствующими пунктами. В результате решения, ход которого мы не будем приводить здесь, можно найти рациональные грузопотоки, а также систему потенциалов, выражающих цену единицы продукта в различных пунктах, включая обусловленную планом рациональную транспортную наценку. На рис. 6 числа, стоящие у вертикальных отрезков, равны потенциалам, а стрелки на контуре указывают направление рациональных перевозок.

Еще раз отметим замечательную согласованность между оптимальным планом и ценами, установленными в соответствии с потенциалами. Для рациональных направлений перевозок (указанных в плане стрелками) разность цен в точности совпадает с затратами на перевозку, т. е. эти перевозки оправданы и выгодны как для производителей, так и для потребителей (например, для пунктов 2 и 6 затраты по перевозке равны 1090 — 1050 = 40). Те же перевозки, которые нерациональны в данных условиях и не рекомендованы в плане, оказываются невыгодными — прирост в цене меньше транспортных затрат (например, перевозка из пункта 1 в пункт 8 явно невыгодна, так как транспортные затраты равны 500, а разность цен меньше этой величины: 1420— 1170 = 250).

Математическая модель транспортной задачи получает все большее и большее практическое применение. В настоящее время в Государственном комитете по материально-техническому снабжению на основе методики, разработанной по этой модели, произведено прикрепление и составлены рациональные планы перевозок для десятков видов продукции химической промышленности, промышленности строительных материалов и продукции других отраслей хозяйства, что дает миллионы рублей экономии в затратах на железнодорожный транспорт.

Упоминавшаяся в начале этого параграфа задача маршрутизации может быть также решена с помощью транспортной модели. Для этого нужно принять в качестве однородного груза ... пустые вагоны, направляемые от пункта выгрузки к пунктам погрузки. Полученное распределение, которое без труда находится на основе транспортной задачи, дает решение задачи об оптимальной маршрутизации, так как оно определяет пути следования вагонов.

Практическое применение транспортной задачи для решения задач оптимальной маршрутизации получило особенное распространение на автотранспорте. В ряде крупных городов производится ежедневный расчет рациональных маршрутов на ЭВМ и на их основе заполняются наряды для значительного процента автомашин. В некоторых небольших автохозяйствах эту методику хорошо освоили и регулярно используют сами диспетчеры. Это позволяет в ряде случаев снижать холостой пробег на 30—50%. Об эффекте применения оптимальной маршрутизации свидетельствует и такой любопытный факт. В одном автохозяйстве, где проводился эксперимент по введению наилучшей маршрутизации транспорта, шоферы, ездившие по оптимальным маршрутам, найденным с помощью метода потенциалов, имели на своих машинах отличительные флажки Через несколько дней после начала эксперимента шоферы наглухо припаяли флажки к машинам, так как они стремились и впредь получать «математические» наряды. Большая эффективность работы этих машин была выгодна не только для автохозяйства в целом, но и для каждого из водителей.

Необходимо подчеркнуть, что постановка транспортной задачи в наибольшей степени характерна именно для социалистической экономики. Критерием оптимальности в этой задаче является минимум суммарных затрат по перевозке груза, т. е. народнохозяйственный эффект, а не выгода отдельных грузополучателей. Ясно, что не только цель, но и сама возможность широкой реализации решения, требующая переформирования всех грузопотоков в масштабах страны, осуществима лишь в условиях научно планируемой экономики. Причем решение транспортной задачи обеспечивает условия для установления экономически обоснованной, дифференцированной системы цен (или транспортных накидок), делающей рациональные прикрепления экономически выгодными и взаимоувязанными для всех производителей и потребителей данной продукции. Такие цены способствуют реализации оптимальных решений в хозяйственной деятельности.

Очень важно знать, что транспортная задача используется не только для решения транспортных проблем. Ее первое применение действительно осуществлялось на примере этой отрасли народного хозяйства, но вообще математическая модель транспортной задачи может описывать самые разные ситуации, очень далекие от перевозок. Задача, о которой сейчас пойдет речь,— *задача размещения производства* — лишний раз подтверждает это положение.

Пусть в пунктах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ имеются или могут быть размещены предприятия, производящие некоторый продукт. В пунктах $B_1, B_2, \ldots, B_n$ потребности в этом продукте заданы и равны соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Затраты по производству единицы продукта в пункте A_i равны C_i, возможный объем производства a_i, а затраты по транспортировке единицы продукта из A_i в B_j равны C_{ij}. Задача состоит в выборе мест расположения новых предприятий, объема производства и плана перевозок так, чтобы суммарные затраты по производству и транспортировке всего потребного объема продукта были минимальны.

Первое осложнение при такой постановке задачи заключается в том, что возможный суммарный объем производства, как правило, не сбалансирован и превышает суммарный объем потребления (это так называемая *открытая транспортная задача*, рассмотренная же ранее называется закрытой). Преодолеть такое затруднение можно, введя добавочный фиктивный пункт потребления B_{n+1} со следующими характеристиками: потребность продукта в нем равна разности между возможным объемом производства продукта и суммарной потребностью всех реальных пунктов потребления (это значит, что в такой пункт свозятся все излишки), а затраты на перевозку в него из всех пунктов производства равны нулю. В результате приходим к обычной транспортной задаче, в которой, однако, в элементах матрицы затрат к затратам на транспортировку добавлены затраты на производство в пункте отправления. Решив эту задачу, определим, в частности, оптимальные объемы производства как суммы потоков из каждого пункта производства в реальные пункты потребления.

Модель, которую мы рассматриваем, а также некоторые ее обобщения (вариантная постановка и др.) используются на практике и для текущего планирования производства, и для размещения предприятий при развитии отрасли в перспективе. В последнем случае в затратах учитываются также и необходимые капиталовложения (затраты на строительство или реконструкцию имеющихся предприятий). Рассчитанный на основе такой модели оптимальный план развития отрасли, в котором одновременно и совместно решается вопрос о размещении всех ее предприятий, оказывается значительно более эффективным, чем план, полученный в результате изолированного экономического анализа по отдельным предприятиям.

Несколько слов следует сказать о выборе целевой функции и вообще о постановке задачи размещения. Здесь используются две постановки. В первом случае требуется при ограниченных ресурсах произвести максимум продукции или, если известен ассортиментный состав продукции, то максимизировать количество ассортиментных наборов. В соответствии со второй постановкой требуется произвести заданный объем продукции с минимальными затратами. Обычно при решении задачи выбирается какая-то одна постановка и один тип целевой функции, но в ряде случаев бывает целесообразно использовать целевые функции обоих типов.

На основе модели транспортной задачи произведено большое число расчетов плана развития отраслей как по стране в целом, так и по отдельным крупным экономическим районам (Сибири, Казахстану и др.) В частности, такие расчеты по размещению и развитию отраслей проведены по производству цемента, ряда других строительных материалов, многим химическим производствам и т д Большое значение имеет ряд расчетов по топливно-энергетическому балансу, т е. по определению рациональной структуры потребления и производства разных видов топлива, а также районов их распределения. Здесь специального упоминания заслуживает работа по исчислению замыкающих затрат на электроэнергию и топливо, которая была проведена в Энергетическом институте СО АН СССР

Как правило, все эти расчеты базировались на транспортной модели, однако учет ряда дополнительных обстоятельств (например, различия эффективности разных видов топлива при том или ином использовании, наличие уже начатых работ по строительству предприятий и др.) заставлял вносить в эти расчеты различные коррективы и усложнения. Немалые осложнения возникали и при подборе технико-экономической информации, необходимой для практической реализации модели

Несмотря на указанные трудности, расчеты на основе транспортной модели получают все более широкое распространение, так как они открывают перспективу получения значительного экономического эффекта. Как показывает опыт, в частности, полученный в Сибирском отделении АН СССР и в ЦЭМИ, с помощью таких расчетов обычно обнаруживаются возможности снижения объема капиталовложений не менее чем на 10—20%.

2 ЗАДАЧА О ВЫБОРЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ

Одним из важнейших вопросов, возникающих при конкретном экономическом анализе производства, является выбор и распределение производственной программы. Существует много способов решения этого вопроса: изготовление одного и того же изделия на различных предприятиях, изменение объемов плановых заданий выпуска данного изделия и др. Естественной поэтому является задача выбора такой производственной программы, при которой каждое предприятие использовалось бы для выпуска таких изделий, которые на нем целесообразнее всего изготавливать, в результате чего либо общий эффект достигает максимума, либо общие затраты становятся минимальными. Этот математический подход гораздо рациональнее часто встречающейся механической разверстки программы, он исключает волевые решения и позволяет осуществить научно обоснованное распределение производственной программы между предприятиями.

Задача о выборе производственной программы (заметим в скобках, что она была первой практической задачей линейного программирования, которую один из авторов настоящей работы решил в 1939 г.) описывается следующим образом. Имеется m предприятий, на которых нужно произвести n продуктов в заданном ассортименте $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Известна производительность i-го предприятия в единицу времени, если оно выпускает j-й продукт (a_{ij}). Предполагается, что $\max\limits_i a_{ij} > 0$, т. е. каждый продукт может производиться хотя бы на одном предприятии. Требуется составить программу работы предприятий (указать долю времени, отведенную на производство каждого продукта на данном предприятии), причем так, чтобы получить максимальную суммарную продукцию в заданном ассортименте в единицу времени. Иначе говоря, имеется в виду случай, когда продукция дефицитна, производственные мощности ограничены и должны полностью использоваться.

Обозначим через x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) долю рабочего времени i-го предприятия, отводимую под j-й продукт. Поиск оптимальной программы загрузки предприятий сводится к решению следующей задачи: найти числа x_{ij} из условий

(1) $\quad x_{ij} \geqslant 0$ (доля времени не может быть отрицательной);

(2) $\quad \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1$ (сумма всех долей не превосходит полного времени работы предприятия);

(3) $\quad y_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}$ (количество j-го продукта, произведенное на всех предприятиях);

$z = \min\limits_{j} \frac{y_j}{l_j}$ (количество ассортиментных наборов продуктов);

z — достигает максимума.

На основании общей теоремы линейного программирования (см. гл. I, § 4) оптимальный план характеризуется тем, что существуют оценки $q_1, q_2, \ldots, q_n$ для производимых продуктов (точнее, для работ по их изготовлению, т. е. чистой продукции) и $d_1, d_2, \ldots, d_m$ для рабочего времени различных предприятий, которые дают

$$q_j a_{ij} = d_i, \text{ если } x_{ij} > 0$$

(если i-е предприятие выпускает j-й продукт, то оценка полученного в единицу времени продукта равна оценке единицы времени этого предприятия);

$$q_j a_{ij} \leqslant d_i, \text{ если } x_{ij} = 0$$

(если i-е предприятие не выпускает j-го продукта в оптимальном плане, то оценка продукта, который можно было бы получить в единицу времени на этом предприятии, не превосходит оценки единицы времени i-го предприятия);

$$q_j = 0, \text{ если } y_j > l_j z$$

(если продукт избыточен, то его оценка равна нулю. Разумеется, избыточность продукта понимается только в рамках данной задачи. Избыточный продукт — это продукт, произведенный в объеме, превышающем ассортиментный, нереализуемый);

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \text{ если } d_i > 0$$

(если оценка единицы рабочего времени предприятия положительна, то предприятие занято все установленное время).

Все эти формулы характеризуют оптимальный план. В нем каждое предприятие используется для выпуска именно тех продуктов, которые наиболее целесообразно производить именно на этом предприятии. В соответствии с таким планом на каждом предприятии принят к производству тот вид продукции, для которого оценка чистой продукции предприятия оказывается наибольшей, а каждый вид продукции изготовляется на том предприятии, оценка расхода времени которого наименьшая. Иначе говоря: если $x_{ij} > 0$, то

$$a_{ij}q_j = \max_s a_{is}q_s = d_i \quad \text{и} \quad q_j = \min_i \frac{d_i}{a_{ij}}.$$

Можно охарактеризовать оптимальный план и с точки зрения затрат на его реализацию. Как правило, все затраты на выпуск продукции состоят из двух частей: из затрат, не зависящих от того, где выпускается данный продукт (материальные затраты), и затрат на работу предприятия, не зависящих от вида производимой на нем продукции. Раз это так, то даже без всяких формул ясно, что оптимальный план дает минимально возможные затраты на весь комплексный выпуск продукции. Ведь согласно оптимальному плану за данный период производится наибольшее число комплектов, и, значит, по любому другому плану для выполнения того же числа комплектов потребуется больший срок. А это приведет к тому, что часть затрат, связанных с работой предприятий, возрастет, материальные же затраты по крайней мере не уменьшатся.

Поскольку мы коснулись вопроса о затратах и показали, что для оптимального плана они минимальны, целесообразно подробнее рассмотреть структуру цен произведенных продуктов и ввести в связи с этим понятие *прокатной оценки*, чрезвычайно важное как при формировании цен, так и вообще в экономическом анализе.

Рассмотрим вполне реальную ситуацию. На двух предприятиях изготавливается (считаем для удобства — в одинаковых количествах) один и тот же продукт, но одно из них оснащено самой современной техникой, а на втором действует устаревшее оборудование. Цены, по которым продается продукт, одинаковы для обоих предприятий, затраты же на его производство на первом предприятии будут меньше, чем на втором. В результате первое предприятие окажется рентабельнее второго, его работников будут отличать и поощрять, хотя их заслуга в этом не так уже велика — лучшие результаты предопределены лучшими условиями.

Для избавления от такой, явно несправедливой и дезориентирующей оценки, целесообразно, чтобы предприятие, имеющее более совершенную технику, вносило государству определенный платеж за использование этой техники. Такие отчисления, уравнивающие доходы по-разному оснащенных предприятий, и носят название прокатных оценок, или ренты. В настоящее время они в некоторой степени находят выражение в плате за фонды, дифференцированных отчислениях от прибыли и других платежах.

Значение математического подхода состоит здесь в том, что он дает возможность объективного, научно обоснованного исчисления размера этих платежей на базе о. о. оценок.

Поясним принцип исчисления таких оценок и их взаимосвязь с ценами продукции. Естественно считать, что цена единицы продукта состоит из трех частей: затрат на материалы, затрат на работу предприятия, отнесенных к единице продукта, и чистого дохода предприятия, также отнесенного к единице продукта. Именно при такой структуре цены и правильно исчисленной норме дохода оказывается, что цена изделия одна и та же на всех предприятиях, на которых данное изделие целесообразно изготавливать.

Введем еще несколько обозначений. Пусть A_j — цена j-го продукта; C_j — материальные затраты в рублях на выпуск единицы j-го продукта; V_i — расход предприятия на функционирование в течение единицы времени; P_i — чистый доход предприятия. Тогда, если цены назначены исходя из соотношения

$$a_{ij}A_j = a_{ij}C_j + V_i + P_i,$$

то на i-м предприятии затраты на производство j-го продукта окупаются. Если же в этой формуле вместо знака $=$ стоял бы знак $>$, то выпуск j-го продукта на i-м предприятии был бы сверхрентабельным, а если знак $<$, то нерентабельным.

Опираясь на изложенный анализ задачи, нетрудно показать, что на основе оптимального плана и его оценок формируются именно такие взаимно согласованные нормы дохода и цены, при которых для всех реально производимых видов продукции выполняется указанное выше соотношение и никакие более рентабельные возможности не упущены. Иначе говоря, оптимальный план полностью согласуется с хозрасчетом (более подробно этот вопрос исследуется в последней главе).

В заключение параграфа приведем простой числовой пример. Имеются три предприятия, деятельность которых характеризуется следующими производственно-экономическими данными (табл. 11).

ТАБЛИЦА 11

Предприятие	Месячная производительность, шт		Месячные затраты на обработку (без материалов), руб	Затраты на обработку, руб		Материалы, руб		Себестоимость руб	
	изделие I	изделие II		изделие I	изделие II	изделие I	изделие II	изделие I	изделие II
А	4000	2000	44 000	11	22	6	4	17	26
Б	6000	4000	60 000	10	15	6	4	16	19
В	5000	5000	40 000	8	8	6	4	14	22

В табл. 11 указана месячная производительность каждого предприятия, если оно будет выпускать либо первое, либо второе изделия, и, кроме того, выделены затраты на работу каждого предприятия, которые не зависят от вида изделий. Нужно, чтобы за год было произведено одинаковое число изделий I и изделий II. Оптимальный план загрузки предприятий должен указать, сколько месяцев в году каждое предприятие производит первое изделие и сколько второе, чтобы общий выпуск изделий был максимальным.

Это задача та же, что в общем виде была рассмотрена в этом параграфе, но в данном случае, когда идет речь всего о двух изделиях, совсем легко сообразить, как составить оптимальный план. Из табл. 11 следует, что на предприятии *А* вместо одного изделия II можно изготовить два изделия I, а на предприятиях *Б* и *В* соответственно полтора и одно изделие I. Значит, первое изделие целесообразнее всего производить на предприятии *А*, второе изделие — на предприятии *В*, а время работы предприятия *Б* разделить между этими изделиями. Ясно также, что оценки для изготовления изделий в оптимальном плане

ТАБЛИЦА 12

Предприятие	Работа предприятия, месяцы		Годовая производственная программа, тыс. шт.		Месячная чистая продукция по условным оценкам (2 : 3), усл. ед.	
	изделие I	изделие II	изделие I	изделие II	изделие I	изделие II
А	12	—	48	—	8 000	6 000
Б	6	6	36	24	**12 000**	**12 000**
В	—	12	—	60	10 000	**15 000**

относятся как 2 : 3. Этот оптимальный план дан в табл. 12, а приведенный в ней расчет чистой продукции по оценкам обосновывает его оптимальность.

В оптимальном плане на каждом предприятии производятся изделия, которые для него более выгодны. Соответствующие оптимальному плану оценки месячной продукции в таблице набраны жирным шрифтом. Предположим, что установленная оптовая цена комплекта из двух видов изделий равна 40 руб., а затраты материалов на одно изделие составляют соответственно 6 и 4 руб. Тогда цена обработки (изготовления) комплекта должна быть принята равной $40 - 6 - 4 = 30$ руб. Поскольку оценки изготовления изделий I и II относятся как 2 : 3, то цены обработки каждого изделия должны равняться 12 и 18 руб. Теперь можно определить цену каждого изделия, так как она складывается из материальных затрат и затрат по обработке. Получаем $A_1 = 6 + 12 = 18$ руб., $A_2 = 4 + 18 = 22$ руб.

Цена изготовления каждого изделия определяется затратами по изготовлению и запланированным доходом с одного изделия. Исходя из этого легко рассчитать доход каждого предприятия от выпуска изделия I и изделия II (см. табл. 13).

Итак, чистый доход предприятий составляет $P_1 = 4000$ руб. (для предприятия *А*), $P_2 = 12000$ руб. (для предприятия *Б*) и $P_3 = 50\,000$ руб. (для третьего предприятия, *В*). Например, для предприятия *А* чистый доход $P_1 = 4000 \cdot 18 - 4000 \cdot 6 - 4000 \cdot 11 = 4000$ руб. в месяц [1]. На основе таких нормативов дохода, которые устанавливаются при рациональном использовании предприятий и рациональных ценах, целесообразно строить экономические показатели работы предприятий, дифференцированную плату за фонды, план прибыли и т. д. Решения, соответствующие оптимальному плану, оказываются выгодными и предприятиям и обществу, нерациональные же — отчетливо демонстрируют свою невыгодность. Кроме того, оценки оптимального плана могут служить для принятия правильных оперативных решений при появлении новых возможностей, не предусмотренных планом. Например, обнаружена возможность дополнительного выпуска изделий II на предприятии *В* путем использования менее производительных станков — применения способа с затратами 12 руб. вместо 8 руб. на изготовление одного изделия. Следует ли реализовать такую возможность?

ТАБЛИЦА 13

Предприятие	Месячные затраты на работу предприятия, руб	Месячная прокатная оценка, руб.	Затраты на единицу изделия, руб							
			изделие I				изделие II			
			затраты по изготовлению	доход с одного изделия	материальные затраты	полные затраты	затраты по изготовлению	доход с одного изделия	материальные затраты	полные затраты
А	44 000	4 000	11	1	6	18	22	2	4	28
Б	60 000	12 000	10	2	6	18	15	3	4	22
В	40 000	50 000	8	10	6	24	8	10	4	22

Правильное решение состоит в том, чтобы организовать дополнительный выпуск изделий на данном предприятии: затраты (12+4=16 руб.) будут ниже 22 руб.—рассчитанной цены на их изготовление, следовательно, увеличение выпуска продукции повысит доход комплекса предприятий в целом. Такое решение и подсказывается оптималь-

[1] Смысл этих величин (норм дохода) состоит в том, что они выражают тот вклад в общий доход, который может быть получен от данного предприятия за один месяц (если предприятие будет работать лишний месяц, мы получим эту сумму) Иначе говоря, если бы предприятие *А* можно было получить для использования дополнительно на один месяц («взять напрокат»), то наш комплекс мог бы дать дополнительный доход в 4000 руб Отсюда происходит упоминавшийся выше термин «прокатная оценка».

ным подходом. Если же подойти к этому вопросу так, как нередко делается на практике, исходя из показателя себестоимости, то было бы принято неверное решение.

Существуют и другие модели задачи о распределении производственной программы, учитывающие иные условия или дополнительные факторы и усложняющие обстоятельства. Например, если объем продукции задан и полной загрузки всего оборудования не требуется, то проблема состоит в распределении программы, при которой заданное количество продукции получалось бы с наименьшими затратами. Все эти и более сложные постановки задачи обычно решаются методами линейного (впрочем, иногда и нелинейного) программирования, в результате которых наряду с планом строится согласованная с ним система экономических показателей.

В качестве одного из многих примеров практического применения задачи о выборе производственной программы можно упомянуть проведенный Институтом математики СО АН СССР совместно с рядом металлургических институтов и Союзглавметаллом расчет рациональной загрузки прокатных станов СССР — размещения заказов на трубы, мелкий и средний прокат и другие виды продукции. Оказалось, что при имеющемся сейчас оборудовании только благодаря правильному распределению заказов можно получить по каждой из рассмотренных групп значительно больше проката, не увеличивая при этом объема перевозок. Несмотря на большие размеры задачи (тысячи ограничений и десятки миллионов способов), расчет выполняется за несколько десятков часов машинного времени

3 МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

Одной из наиболее плодотворных и перспективных областей применения оптимального и, в частности, линейного программирования является сельское хозяйство. Здесь математико-экономические методы могут в сравнительно короткий срок дать очень большой эффект. С одной стороны, сельскохозяйственные предприятия и производственные процессы в них отличаются значительной однородностью. Они выпускают намного меньший ассортимент продукции, используя при этом менее разнообразные средства производства, чем промышленность. С другой стороны, решение задач планирования в сельском хозяйстве зачастую оказывается сложнее, нежели в промышленности, так как здесь приходится учитывать природные условия, сезонность работ, стохастический (случайный) характер некоторых величин и др. Как это ни парадоксально, но именно эти осложняющие факторы усиливают эффективность применения методов оптимального планирования. Без таких методов оказывается просто невозможно научно обоснованно решить многие экономические проблемы развития сельского хозяйства.

Рассмотрим простейшую модель размещения сельскохозяйственного производства. Имеется m видов земельных участков, качественно отличающихся друг от друга. Хозяйство планирует возделывание n видов культур, причем полученная продукция должна находиться в соотношении $l_1 : l_2 : \ldots : l_n$. Предполагаются известными числа a_{ij}, показывающие, сколько центнеров продукции j-й культуры можно получить с i-го участка. Требуется определить, какую часть каждого участка под какую культуру нужно отвести, чтобы получить максимальное число ассортиментных наборов продукции. Обозначая через x_{ij} долю i-го участка, отводимую под j-ю культуру, приходим к следующей задаче.

Найти величины x_{ij} из условий

(1) $x_{ij} \geqslant 0$ (доля участка не может быть отрицательной);

(2) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1$ (сумма долей i-го участка, отводимых под различные культуры, не превышает единицы);

(3) $y_k = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik} x_{ik}$ (объем продукции k-й культуры, полученной на всех участках);

$Z = \min\limits_{j} \dfrac{y_j}{l_j}$ (число ассортиментных наборов продуктов);

Z — достигает максимума.

Нетрудно заметить, что мы пришли к той же самой модели, что и в задаче о выборе производственной программы. Здесь снова проявилась замечательная особенность математики, с которой мы уже неоднократно сталкивались,— одна и та же математическая модель описывает совершенно различные явления. В качестве полезного упражнения можно порекомендовать читателю «перевести на сельскохозяйственный язык» иллюстративный пример из предыдущего параграфа.

Если рассматривать задачу размещения сельскохозяйственного производства более полно, учитывая урожайность в течение ряда лет, влияние севооборотов, возможность искусственного орошения отдельных участков и т. п., то соответствующие математические модели будут более сложными. Еще сложнее модели, где различные отрасли сельскохозяйственного производства рассматриваются в комплексе. Тем не менее все эти модели остаются, как правило, в рамках линейного программирования независимо от того, в каких масштабах они применяются — от бригады и хозяйства до республики и всей страны.

Для решения проблем сельскохозяйственного производства используются и другие модели. Упомянем, в частности, задачи об оптимальной структуре тракторного парка, о выборе рационов откорма сельскохозяйственных животных, о наилучшей системе внесения удобрений в почву и др. При решении подобных проблем, если оно требует значительного приближения модели к действительности, например учета погодных факторов, возможного спроса на сельскохозяйственную продукцию и т. п., модель перестает быть линейно-программной, и для ее исследования требуется другой математический аппарат. Этот вопрос будет рассматриваться в следующей главе.

В качестве примера практического применения математических методов в планировании сельскохозяйственного производства укажем расчеты, проведенные для совхозов «Семеновод» и «Бийский» Алтайского края с участием математико-экономического отдела Института математики СО АН СССР. В результате этих расчетов были найдены планы размещения сельскохозяйственных культур, а также разработаны наиболее выгодные виды специализации для каждого хозяйства. Проводились также расчёты рационального размещения сельскохозяйственного производства по зонам Новосибирской и Омской областей Разработки комплекса моделей для страны в целом проводятся Институтом кибернетики Министерства сельского хозяйства и другими организациями.

Несколько слов об экономическом смысле оценок для задачи о размещении сельскохозяйственного производства. Подобно прокатным оценкам, здесь получаются оценки различных участков земли, позволяющие соизмерять и сопоставлять затраты, возникающие при производстве одной и той же продукции на землях разного качества. На базе этих оценок может быть обоснованно исчислена *рента на землю* различных по качеству участков, которая в вопросах планирования сельскохозяйственного производства имеет не меньшее значение, чем оценка производственных фондов в промышленности.

Учет ренты на землю в цене продукции позволяет прежде всего экономически уравнять условия производства для различных районов. Действительно, только рентные отчисления могут позволить получить равную оценку результатов при равном труде в хозяйствах, расположенных на Северном Кавказе и в Коми АССР. Кроме того, взимание ренты, учитывающей разнообразие различных территорий, стимулирует рациональное использование лесов, охотничьих угодий, водоемов, служит экономическим рычагом, предотвращающим бесхозяйственное отношение к этим природным богатствам. Экономически грамотное использование минеральных богатств земли — руд, угля, нефти, газа — обеспечивается с помощью *горной ренты*.

Высказанные выше общие положения о планировании сельскохозяйственного производства проиллюстрируем конкретным числовым примером.

Пусть имеется три участка различной по плодородию земли — лучшей, среднего качества и худшей. Площадь последнего будем считать практически неограниченной. По плановому заданию на этих участках нужно произвести 5000 ц пшеницы, 3500 ц ржи и 5000 ц овса. Требуется составить такой план, который обеспечил бы выполнение задания с минимальными затратами труда. Данные об урожайностях и затратах труда на каждую культуру (в них включены и прочие затраты) приведены в табл. 14.

Прежде чем строить оптимальный план посева, проведем анализ имеющихся данных. Выясним, каким образом целесообразнее всего использовать лучшую землю. Легко подсчитать, что гектар лучшей земли, отведенной под пшеницу, дает такой же урожай, как 1,5 га земли среднего качества. Следовательно, использование 1 га

ТАБЛИЦА 14

Качество земли	Площадь, га	Культура	Урожайность, ц/га	Затраты труда, дней/га
Лучшая	100	Пшеница	30	10
		Рожь	25	8
		Овес	28	7
Средняя	200	Пшеница	20	10
		Рожь	20	8
		Овес	26	7
Худшая	300 (и более)	Пшеница	15	10
		Рожь	15	8
		Овес	25	7

лучшей земли под пшеницу, требующее 10 дней труда, дает ту же продукцию, что и 15 дней труда на гектаре земли среднего качества и, значит, лучшая земля обеспечивает экономию труда в размере пяти дней. Для ржи вместо гектара лучшей земли нужно использовать $^5/_4$ га земли среднего качества, а экономия от использования лучшей земли составляет $^1/_4 \cdot 8 = 2$ дня. Для овса вместо 1 га лучшей земли требуется 14/13 га земли среднего качества, а экономия от использования лучшей земли составляет $1/13 \cdot 7 = 0{,}54$ дня. Отсюда ясно, что наиболее эффективно можно уменьшить затраты труда, если под пшеницу использовать лучшую землю.

Итак, отведем всю лучшую землю под пшеницу, что даст в результате 3000 ц. Но ведь плановое задание требует еще 2000 ц пшеницы Какую землю следует использовать для их получения? Подсчеты, аналогичные предыдущим, показывают, что под пшеницу нужно отвести еще 100 га земли среднего качества (земля среднего качества по сравнению с худшей дает экономию в 3,3 дня на гектар пшеницы, тогда как для ржи и овса экономия составляет соответственно 2,67 дня и 0,28 дня). В точности такие же рассуждения позволяют заключить, что под рожь следует отвести оставшиеся 100 га земли среднего качества и еще 100 га худшей земли При этом урожай ее составит $100 \cdot 20 + 15 \cdot 100 = 3500$ ц. Плановое задание по производству овса можно выполнить, если отвести под него 200 га худшей земли ($25 \cdot 200 = 5000$ *ц*). Проведенный анализ позволяет построить оптимальный план для поставленной задачи (табл. 15).

Читателю, разобравшемуся в материале предыдущих параграфов, ясно, что в этой задаче о о.оценки получат все культуры, а также более эффективные природные ресурсы — лучшая земля и земля среднего качества. Худшая земля будет иметь нулевую оценку, так как она имеется в избытке. Каковы же эти о.о.оценки? Двигаясь по табл. 15 снизу вверх, найдем такие оценки (выраженные в труде) для центнера каждой культуры и для использования гектара земли лучшего и среднего качества.

Производство 25 ц овса требует 7 дней труда: в оценке овса не участвуют затраты, связанные с использованием лучших земель, так как овес засевается только на земле худшего качества. Поэтому о.о.оценка овса будет равна $7 : 25 = 0{,}28$ дня/ц.

Оценка центнера ржи на худшей земле составит $8 : 15 = 0{,}533$ дня. С гектара земли среднего качества получают 20 ц ржи, которые, если бы они производились на худшей земле, требуют $20 \cdot 0{,}533 = 10{,}67$ дня, в то время как на земле среднего качества эти затраты составляют

ТАБЛИЦА 15

Качество земли	Культура	Урожайность, ц/га	Затраты, дней/га	Площадь по плану, га	Сбор с участка, ц			Затраты труда на участок, дней
					пшеница	рожь	овес	
Лучшая	Пшеница	30	10	100	3000	—	—	1000
	Рожь	25	8	—	—	—	—	—
	Овес	28	7	—	—	—	—	—
Средняя	Пшеница	20	10	100	2000	—	—	1000
	Рожь	20	8	100	—	2000	—	800
	Овес	26	7	—	—	—	—	—
Худшая	Пшеница	15	10	—	—	—	—	—
	Рожь	15	8	100	—	1500	—	800
	Овес	25	7	200	—	—	5000	1400
Всего		—	—	—	5000	3500	5000	5000

8 дней. Так как 10,67 — 8 = 2,67 дня, эта цифра и принимается в качестве оценки использования гектара земли среднего качества.

Поскольку с гектара такой земли снимается 20 ц пшеницы, к видимым затратам в 10 дней следует прибавить оценку использования этого гектара (2,67 дня) Полученный результат (12,67 дня/га) представляет полные затраты на производство 20 ц пшеницы на земле среднего качества Отсюда о.о.оценка центнера пшеницы равна 12,67 : 20 = 0,633 дня. По этой оценке 30 ц пшеницы, полученные с гектара лучшей земли, оцениваются в 30 · ·0,633 = 19 дней. Видимые затраты составляют 10 дней, значит о.о.оценка использования гектара лучшей земли равна 19—10 = 9 дней.

С помощью найденных оценок по обычным правилам можно убедиться в том, что план, приведенный в табл. 15, действительно оптимален Мы не будем приводить здесь расчетов, а ограничимся тем, что укажем окончательные данные о структуре затрат с учетом ренты (табл. 16)

ТАБЛИЦА 16

Культура	Качество земли	Урожайность, ц/га	Затраты труда на гектар, дней			Затраты труда на центнер, дней		
			непосредственные	косвенные (рента)	полные	непосредственные	косвенные (рента)	полные
Пшеница	Лучшая	30	10	9	19	0,333	0,3	0,633
	Средняя	20	10	2,67	12,67	0,5	0,133	0,633
	Худшая	15	10	—	10	0,667	—	0,667
Рожь	Лучшая	25	8	9	17	0,32	0,36	0,680
	Средняя	20	8	2,67	10,67	0,4	0,133	0,533
	Худшая	15	8	—	8	0,533	—	0,533
Овес	Лучшая	28	7	9	16	0,25	0,321	0,571
	Средняя	26	7	2,67	9,67	0,269	0,103	0,372
	Худшая	25	7	—	7	0,280	—	0,280

Из этой таблицы видно, что в плане используются те способы, для которых суммарные затраты на производство центнера каждой культуры наименьшие (соответствующие данные выделены в таблице жирным шрифтом). Для использованных в плане способов суммарные затраты равны оценке продукции, для неиспользуемых они больше указанной оценки.

Пример, рассмотренный нами, еще одно доказательство преимуществ анализа на основе оптимальных решений. Если принимать во внимание только непосредственно затраты без ренты, как это нередко делается, то рожь может оказаться (в данном примере) оцененной выше пшеницы, хотя пшеница на любой земле требует бо́льших затрат на производство, чем рожь. Точно так же, если ориентироваться на непосредственные, видимые затраты, следует признать, что посевы на худшей земле вообще нерентабельны, и т. д.

4 ОБЩИЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Задачи поиска оптимального решения в частных экономических моделях, как мог убедиться читатель, охватываются общей схемой линейного программирования. На основе такой схемы может быть произведен анализ задачи, даны эффективные средства нахождения оптимального решения и помимо оптимального плана найдены о.о. оценки различных ингредиентов (производственных факторов, продукции), которые служат базой эффективного экономического анализа и совершенствования плана. Опишем некоторые общие схемы применения оптимального математического программирования в планово-экономическом анализе.

Но сначала несколько предварительных замечаний. Нужно иметь в виду, что задачи текущего и перспективного планирования обладают существенными различиями. В первом случае речь идет о составлении плана на сравнительно краткий промежуток времени при определенных, более или менее неизменных условиях — используемых производственных процессах, ресурсах средств производства, требованиях к продукции. В перспективном планировании речь идет о составлении плана на сравнительно длительный период времени при существенных изменениях как в условиях, так и ресурсах. Иначе говоря, имеется в виду схема расширенного воспроизводства, при которой благодаря появлению новых производственных фондов меняется сама производственная база и выносятся долговременные решения о создании и использовании этих фондов, т. е. учитывается технический прогресс. Поэтому для задач того и другого типа необходимы различные модели.

Далее, в текущем планировании значительно разнятся задачи составления плана всего народного хозяйства, т. е. замкнутой экономической системы, располагающей собственными производственными ресурсами, определяющей и удовлетворяющей потребности общества (личные и общественные), и плана некоторого отдельного хозяйственного подразделения (предприятия, фирмы, комбината, отрасли, экономического района). Экономика такой системы является уже незамкнутой, ее функционирование рассчитано на получение ряда ингредиентов (сырья, материалов) извне и выдачу большой части продукции также внешним потребителям.

Наконец, при наличии иерархически упорядоченного комплекса хозяйств возникает проблема взаимосогласованного плана их действий для достижения оптимальных результатов всего комплекса.

Приведем математическое описание одной из упомянутых моделей, а также кратко обсудим некоторые особенности других задач.

Задача текущего производственного планирования (*статическая модель*). Эта задача состоит в том, чтобы исходя из определенных ресурсов (оборудование, рабочая сила, сырье), которыми располагает некое хозяйственное подразделение, например предприятие, с учетом реальных условий и ограничений (размеры поставок сырья и материалов, объем трудовых ресурсов или фонда зарплаты, величина заказов и требований на продукцию и т. п.) определить производственную программу и организовать ее выполнение так, чтобы достичь наилучших результатов.

При построении математико-экономической модели такой задачи ряд вопросов, относящихся к ее структуре и исходной информации, должен быть детализирован и уточнен — прежде всего основные ингредиенты (виды материалов, продукции, оборудования, рабочей силы), принятая степень их объединения (агрегирования), имеющиеся ресурсы и ограничения, технологические и организационно возможные производственные способы, затрачиваемые и получаемые в них ингредиенты — все, что определяет матрицу задачи.

При этом среди затрачиваемых ингредиентов можно выделить *расходуемые*, которые полностью потребляются в течение одного производственного цикла (сырье, полуфабрикаты), и *задалживаемые*, остающиеся после использования практически в неизменном виде (станки, машины). Получаемые ингредиенты — это конечная продукция, задание по одним видам которой может быть точно зафиксировано, по другим — задано в определенных пределах, по третьим — связано с требованием комплектности, по четвертым — может целиком определяться самим предприятием. Различный вид могут иметь ограничения на сырье и материалы — жесткие лимиты и лимиты, зависящие от объема выпуска продукции. Очень существенно разделение ингредиентов на специфические для данного предприятия (установленное оборудование, полуфабрикаты) и на ингредиенты, участвующие во внешних связях (материалы, конечная продукция, привлекаемая рабочая сила).

Наконец, очень важным и часто не бесспорным является принятие критерия оптимальности. Для сопоставления результатов, получаемых в различных планах (вариантах решения), основное значение имеют переменные ингредиенты, т е. те, по которым в разных вариантах получаются различные результаты (наибольшее значение имеют при этом внешние ингредиенты). В критерии оптимальности желательно для расходуемых ингредиентов добиваться минимума, а для производимых максимума. Однако, чтобы иметь возможность единого сравнения, они должны быть объединены в один критериальный показатель (целевую функцию). Типичными являются для такой функции требования максимума продукции (наборов) при данных затратах, минимума затрат на данную продукцию (или одного вида затрат — труда), максимума прибыли. В последнем случае обязательно, а в предыдущих — во многих случаях также необходимо, чтобы отдельные ингредиенты могли взвешиваться по некоторым оценкам или баллам. Хотя удовлетворительное согласование нескольких требований в одном критерии — достаточно сложное дело, оно все же нередко осуществимо. Доказательство тому — задача о выборе производственной программы, рассмотренная в § 2 настоящей главы, где одно и то же решение дает и максимум продукции, и минимум затрат, и максимальный доход. Определенные затруднения вызывает учет в критерии внешних условий: не всегда ясно, какие ресурсы могут быть предоставлены хозяйственному объекту и какие требования к нему предъявляются.

Приведенная схема описания задачи текущего планирования в одних случаях непосредственно делает ясной возможность ее записи в форме основной задачи линейного программирования, а в других случаях простыми приемами она сводится к этой задаче. Поэтому линейно-программные методы решения задачи позволяют производить расчет оптимального плана, а ее анализ дает о.о.оценки всех участвующих в производстве ингредиентов. Эти оценки очень полезны при анализе и оперативном корректировании плана. Они показывают, какой вклад дает каждая единица продукции, полуфабриката, сырья, трудовых ресурсов, часа работы того или иного оборудования в критерий оптимальности, какова оценка каждого ограничения В результате удается не только выявлять, но и количественно оценивать узкие места производства, определять, за счет каких источников можно добиться наибольшего эффекта, и т. д.

Рассмотрев, какие именно факторы следует учитывать при моделировании задач текущего планирования, приведем в качестве иллюстрации математическую модель одной из возможных постановок такой задачи.

Пусть предприятие должно выпускать n видов продукции в заданной пропорции $k_1 : k_2 : \ldots : k_n$. Это предприятие располагает $N - n$ видами производственных факторов (сырьем, трудовыми ресурсами, производственными мощностями и т. п), имеющимися в объемах, равных соответственно $b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots, b_N$ и r допустимыми технологическими способами. Каждый из этих способов определяется вектором

$$a^s = (a_1^s, \ldots, a_n^s, a_{n+1}^s, \ldots, a_N^s), \quad (s = 1, 2, \ldots, r)$$

первые n компонент которого характеризуют выпуск продукции, а последние $N - n$ — размеры затрат, соответствующие данному технологическому способу при однократном его использовании.

Выбрать текущий производственный план — это значит (на математическом языке[1]) указать вектор $x = (x_1, \ldots$

$\ldots, x_r)$ с неотрицательными компонентами, определяющими интенсивность применения каждого из возможных технологических способов. Понятно, что, выбрав план π, мы обеспечим выпуск i-го вида продукции в количестве

$$y_i^\pi = \sum_{s=1}^{r} a_i^s x_s, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В качестве целевой функции — критерия качества планирования — выберем число ассортиментных наборов продукции, предполагая, что в один набор различные виды продукции входят в количествах, равных соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Естественно будет искать такой план, который, удовлетворяя всем ограничениям, максимизирует целевую функцию.

Теперь уже можно записать экстремальную задачу, соответствующую задаче текущего производственного планирования.

Требуется найти вектор $\pi = (x_1, \ldots, x_2)$ из условий

(1)	$x_s \geqslant 0, s = 1, 2, \ldots, r$	(интенсивности применяемых способов неотрицательны);
(2)	$\sum_{s=1}^{r} a_k^s x_s \leqslant b_k$, $k = n+1, \ldots, N$	(ресурсы факторов не перерасходованы);
(3)	величина $\mu(\pi) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{y_i^\pi}{k_i}$	выражающая число ассортиментных наборов продукции, должна быть максимизирована.

Как обычно, план π, удовлетворяющий условиям (1) и (2), будем называть допустимым, а план, удовлетворяющий условиям (1) — (3) — оптимальным. На первый взгляд из-за формы условия (3) может показаться, будто получившаяся задача не является задачей линейного программирования. Однако это впечатление обманчиво. Обозначим $\mu(\pi)$ через y и перепишем задачу так.

Найти

$$\max\,\{y\}$$

из условий

$$(1') \qquad x_s \geqslant 0, \quad s = 1, 2, \ldots, r$$

$$(2') \qquad \sum_{s=1}^{r} a_k^s x_s \leqslant b_k,\ k = n+1, \ldots, N$$

$$(3') \qquad y - \frac{\sum\limits_{s=1}^{r} a_1^s x_s}{k_1} \leqslant 0$$

(количество ассортиментных наборов продукции определяется самым дефицитным ее видом).

$$y - \frac{\sum\limits_{s=1}^{r} a_2^s x_s}{k_2} \leqslant 0 \quad \ldots \quad y - \frac{\sum\limits_{s=1}^{r} a_n^s x_s}{k_n} \leqslant 0$$

Это теперь уже бесспорно задача линейного программирования. Для того чтобы дать характеристику оптимального плана получившейся задачи, введем о.о.оценки для всех рассматриваемых ингредиентов: $c_1, c_2, \ldots, \ldots, c_n$ — оценки продукции; $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_N$ — оценки производственных факторов.

Допустимый план $\pi = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ будет оптимальным тогда и только тогда, когда найдены такие числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_N$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{а)} \qquad c_i \geqslant 0 \ \text{ при всех } i, \ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i > 0$$

(оценки неотрицательны, причем хотя бы один из видов продукции имеет положительную оценку);

$$\text{б)} \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^s \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} c_k a_k^s, \quad s = 1, 2, \ldots, r$$

(при каждом технологическом способе оценка получаемой продукции не превосходит суммарной оценки затрачиваемых факторов — сырья, производственных мощностей, труда);

в) $$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^s = \sum_{k=n+1}^{N} c_k a_k^s, \text{ если } x_s > 0$$

(для используемых способов оценка производимой продукции в точности равна суммарной оценке затрачиваемых факторов, т. е. соблюден принцип рентабельности);

г) $$c_i = 0, \text{ если } y_i^\pi > k_i \mu(\pi), i = 1, 2, \ldots, n$$

(если какой-либо вид продукции производится в избытке, то его оценка равна нулю);

д) $$c_k = 0, \text{ если } \sum_{s=1}^{r} a_k^s x_s < b_k, \quad k = n+1, \ldots, N$$

(если производственный фактор не используется полностью, то его оценка равна нулю).

Методы нахождения таких объективно обусловленных оценок были показаны выше. Отметим лишь, что их введение в расчеты повышает качество планирования. Например, использование прокатных оценок способствует более правильному использованию производственного оборудования. Сейчас еще нередко случается, что прогрессивная техника в одном месте простаивает, хотя в другом месте в ней очень нуждаются. Это во многом результат того, что задалживание дефицитного оборудования пока еще не оценивается количественно. Недостатки подобного рода можно было бы исправить, учитывая при управлении экономикой прокатные оценки, ренту за оборудование и за трудовые ресурсы.

Производственный план комплекса. Социалистическое общественное производство составляет единую систему с едиными целями и задачами и в то же время организационно и структурно представляет собой комплекс ряда отдельных хозяйственных единиц — предприятий и объединений, имеет сложную структуру и иерархию. Поэтому, когда речь идет о плане для народного хозяйства в целом или для некоторого хозяйственного объединения, то, собственно, нужно иметь не один план, а комплекс взаимоувязанных планов.

Для определенности будем рассматривать только две ступени — ряд предприятий и объединяющий их комплекс, замкнутый и автономный. Этот комплекс имеет ресурсы как жестко закрепленные за отдельными предприятиями, так и по некоторым ингредиентам (в целом или в определенной части) находящиеся в распоряжении всего комплекса. Структуру и конкретное задание по конечной продукции для личных и общественных нужд комплекса будем считать известными. Структура потребления, вообще говоря, это отдельная проблема, которая должна решаться совместно с производственным планом и также с помощью математических средств, но мы в целях упрощения отвлекаемся от ее анализа.

Составить комплекс планов — значит разработать такие планы для всех предприятий, в которых учитываются имеющиеся ресурсы, заданная для всего комплекса конечная продукция и взаимосогласование выпуска этой продукции по отдельным предприятиям. В плане комплекса, таким образом, должны быть предусмотрены сбалансированные материальные потоки между предприятиями, каждое из которых снабжается необходимыми затрачиваемыми ингредиентами за счет продукции других предприятий или из ресурсов всего комплекса. Кроме того, этот план должен быть оптимальным в смысле одного из возможных критериев.

Анализ такой задачи, которая также сводится к линейно-программной схеме, приводит к следующим условиям оптимальности комплекса. Во-первых, план каждого предприятия сам по себе должен быть оптимальным с учетом (при фиксации) тех входных и выходных потоков, которые предусмотрены связями комплекса. Во-вторых, в системе оценок оптимального плана каждого предприятия оценки внешних ингредиентов (участвующих в разных предприятиях) должны быть одни и те же, т. е. при оптимальном плане комплекса разные предприятия должны оценивать одни и те же ингредиенты одинаково.

Эти условия дают и эффективный способ расчета плана подобного комплекса. Строя оптимальный план для каждого предприятия исходя из некоторой системы оценок для внешних ингредиентов (общих для комплекса), можно скорректировать оценки с тем, чтобы выровнять баланс по соответствующим ингредиентам (снижаем оценку, если тот или иной ингредиент избыточен, и повышаем, если он недостаточен). После ряда исправлений приходим к сбалансированному и оптимальному плану.

На этой экономической идее, реализованной в виде точного алгорифма, основан так называемый *метод декомпозиции Данцига — Вульфа*, который по принципу своего действия напоминает рыночный механизм — избыток ведет к снижению цены и уменьшению выпуска продукта, недостаток вызывает противоположные последствия так, что после некоторого числа шагов устанавливается равновесие. Причем при построении оптимального плана этот механизм реализуется на вычислительной машине, что намного быстрее и, главное, экономнее, нежели реальный рынок.

Наряду с составлением плана комплекса возникает проблема оперативного регулирования деятельности как комплекса в целом, так и отдельных предприятий, обеспечивающего эффективное выполнение плана. Эта научная проблема функционирования экономической системы в оптимальном режиме лишь сравнительно недавно поставлена на повестку дня в полном объеме. Одна из ее важнейших сторон состоит в том, чтобы правильно согласовать оценки деятельности всего комплекса и отдельных его частей.

Действительно, каждое предприятие комплекса имеет свой локальный критерий качества работы, к достижению которого оно и стремится. Если эти локальные критерии не соответствуют общему, глобальному критерию качества работы комплекса, то может случиться, что предприятия, стремясь к улучшению показателей своей деятельности, не способствуют улучшению показателя, характеризующего работу комплекса в целом. Для построения локальных и глобальных критериев могут служить экономические показатели, построенные на базе оценок оптимального плана — прибыль, плата за фонды и др. Характерно, что именно модельный подход открывает пути для эффективного формирования этих критериев.

При составлении производственного плана для большого комплекса приходится считаться и с объемом информации, циркулирующей между отдельными его звеньями Едва ли целесообразен и возможен обмен всей детализированной информацией между ними. Естественными представляются планирование и отчетность по достаточно укрупненным, обозримым данным. В противном случае количество лиц, формирующих отчетные и плановые показатели, было бы сравнимо с количеством работников производственной сферы. В связи с этим возникает вопрос об оптимальном агрегировании (объединении в группы пунктов производства, типов сортамента и других видов информации), ставящем своей целью устранение избыточности информации при сохранении, однако, уровня ее, обеспечивающего нормальное функционирование комплекса. Немалую роль такое агрегирование и связанное с ним упрощение задачи планирования сыграет и в расширении возможностей решения подобных задач на ЭВМ.

Упомянутые вопросы, конечно, ни в коей мере не исчерпывают всех проблем, связанных с оптимальным функционированием производственного комплекса. Список их можно было бы продолжить, что мы отчасти и сделаем в последней главе этой книги. Здесь же отметим лишь, что модельный математический подход в сочетании с обобщением практического опыта дает возможность для широкой научной постановки и анализа проблемы оптимального функционирования экономической системы.

Задачи перспективного планирования (динамическая модель). Проблемы перспективного планирования, как указывалось, имеют качественно иной характер, нежели вопросы текущего планирования. Однако для их решения используется тот же аппарат линейного программирования. При перспективном планировании длительный период разбивается на ряд временны́х интервалов, которые позволяют учесть динамику процесса. Такая динамическая модель учитывает те же ингредиенты, что и статическая модель текущего планирования, однако для каждого временно́го интервала они рассматриваются как различные (ведь, например, уголь, добытый в 1972 г., нельзя сжечь в 1971[1]). В результате число ингредиентов резко возрастает.

То же относится и к производственным способам. Наряду с прежними видами способов, действующими в пределах одного временно́го интервала, появляются способы, затрагивающие ряд интервалов, например строительство предприятия и последующее его использование. Возможность создания новых средств производства позволяет вводить на последующих этапах новую технологию, учитывать достижения технического прогресса, что чрезвычайно увеличивает число возможных технологических способов производства и приводит к появлению разных вариантов решений.

Постановка задачи перспективного планирования имеет сходный вид с задачей текущего планирования, однако с меньшим числом ограничений. Они относятся к запасам и оборудованию в начальный момент и лишь к немногим ресурсам на весь период (демографические ограничения по ресурсам труда, геологические ограничения по природным ресурсам). Что касается развития производственных фондов, состава продукции, то они определяются в самом плане. Критерием оптимальности является математически оформленное требование наилучшего удовлетворения потребностей в течение планируемого периода и обеспечение потенциальных возможностей дальнейшего роста производства за пределами планового периода. Поскольку при такой постановке задачи получается линейно-программная модель, ее сопровождает двойственная задача и определяются оценки для всех ингредиентов (свои для каждого периода). Таким образом, модель задачи перспективного планирования дает возможность объективно сравнивать не только разнокачественные, но и разновременные затраты и эффекты, приводя их к одному временно́му интервалу.

Кроме такой, общей динамической модели существуют модели развития отрасли, модели с более стандартизированной структурой способов (модель Неймана), с крупноагрегированными ингредиентами (однопродуктовая и двухпродуктовая модели) и др. Они допускают более упрощенный расчет и анализ. Следовательно, и для решения проблем перспективного планирования разработаны оптимальные математические модели. Некоторые из них исследованы довольно глубоко с качественной точки зрения, но их применение для практических количественных измерений еще встречается со значительными трудностями и нерешенными проблемами.

Сопоставляя динамическую модель со статической моделью, можно отметить ряд преимуществ первой, ее гораздо бо́льшую близость к реальной действительности. В статической модели предусматривается задание по выпуску конечной продукции. С одной стороны, оно ограничивает возможности варьирования производственного плана, с другой — реально указать это задание (в части производства средств производства) можно лишь зная план последующего развития экономики. Это значит, что большой объем информации задается «сверху» из внемодельных соображений, чем, естественно, снижается ценность результатов. В динамической же модели задание извне указывается только по предметам потребления, а программа по средствам производства определяется в самом процессе построения плана. Моделям текущего планирования присуща значительная неустойчивость оценок, а также большое число нулевых оценок на ингредиенты. Это связано с тем, что такие ингредиенты кажутся полученными в избытке, поскольку статическая модель не учитывает возможности их использования за пределами планового года. В динамической модели подобные недостатки проявляются намного слабее. Продукт, произведенный в избытке, как правило, имеет ненулевую оценку, так как наряду с прочими способами в модели имеется и «способ хранения».

Следует сказать, однако, что недостатки статической модели в полной мере проявляются, если рассматривать ее как самостоятельную модель. Если же рассматривать ее как фрагмент, часть динамического плана, охватывающую один период, ресурсы и задания которого согласованы с этим планом, то статическая модель лишается указанных недостатков. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу составления перспективного плана в весьма упрощенных условиях.

При производстве некоторого продукта используется определенное оборудование одного вида (машины) и трудовые ресурсы. Имеется несколько технологических способов, использующих машины и трудовые ресурсы с разной интенсивностью. Производимый продукт частично расходуется на потребление, а частично — для изготовления или приобретения новых машин. На каждый год известны ресурсы труда, объемы потребления, а также известно число машин, имеющихся в первый год. Необходимо составить производственный план, который, удовлетворяя имеющимся ограничениям, обеспечивал бы максимальный объем производственных мощностей к концу периода. Предполагается при этом, что лицо, составляющее план, располагает следующей информацией.

1. Планируемый период — 4 года.

2. Даны ресурсы труда и объемы потребления (табл. 17).

3. Указаны текущие (одногодичные) технологические способы (табл. 18).

ТАБЛИЦА 17

Год	Ресурсы труда	Размеры потребления, ед продукта
I	100 000	1 500
II	100 000	1 600
III	100 000	1 700
IV	100 000	1 800

ТАБЛИЦА 18

Способы	Затраты и продукция, ед		
	труд, человеко дней	производственные мощности	продукт
1	— 50 000	0	1000
2	— 40 000	—20	1000
3	— 30 000	—50	1000
4	— 25 000	—70	1000

4. Машины могут приобретаться в любом количестве из расчета 20 единиц продукции за машину. Приобретение и использование машин может быть описано как некоторые способы, реализуемые в течение ряда лет (табл. 19).

5. В первом году имеется 30 машин.

ТАБЛИЦА 19

Способы	Затраты и продукция, ед							
	продукт по годам				производственные мощности по годам			машин к концу периода
	I	II	III	IV	II	III	IV	
5 (приобретение машины в году I)	—20	—	—	—	1	1	1	1
6 (то же во II)	—	—20	—	—	—	1	1	1
7 (» » в III)	—	—	—20	—	—	—	1	1
8 (» » в IV)	—	—	—	—20	—	—	—	1

ТАБЛИЦА 20

Год	Производится продукта способом				Затраты		Валовая продукция	Приобретение машин (использование способов 5—8)
	1	2	3	4	труда	производственных мощностей		
I	800	1500	—	—	100 000	30	2300	40
II	—	2071	571	—	100 000	70	2642	52
III	—	957	2057	—	100 000	122	3014	66
IV	—	—	2718	744	100 000	188	3462	83

В табл. 20 приведен оптимальный перспективный план, соответствующий указанным условиям. По этому плану к концу четвертого года машинный парк будет состоять из 271 машины. Чтобы рассчитать такой план, достаточно свести задачу к основной задаче линейного программирования и применить какой-либо из способов ее решения. При этом будет найден план (интенсивности способов), который обеспечивает при заданных ограничениях на ресурсы техники и рабочей силы, а также известных размерах потребления, наибольшие выходные производственные мощности.

Убедимся в том, что приведенный план оптимален. Для этого построим о о. оценки единицы труда, единицы продукта и прокатную оценку машины для каждого из четырех лет. Обозначим их соответственно T_1, T_2, T_3, T_4 (оценки труда), P_1, P_2, P_3, P_4 (оценки продукта), M_1, M_2, M_3, M_4 (прокатные оценки машины)

Пусть оценка единицы труда в четвертом году равна A, т. е $T_4 = A$. Так как оценка продукции равна сумме оценок затрат и эта сумма одинакова для всех используемых способов, то для оценок справедливы равенства

$$25\,000T_4 + 70M_4 = 1000P_4$$

(первый член этой формулы — оценка затрат труда в способе 4; второй — оценка затрат мощностей в способе 4; третий — оценка продукции, полученной по способу 4).

$$30\,000T_4 + 50M_4 = 1000P_4$$

первый член этой формулы — оценка затрат труда в способе 3; второй — оценка затрат мощностей в способе

3; третий — оценка продукции, полученной по способу 3).

Выполняя преобразования, получаем

$T_4 = A$, $M_4 = 250\ A$ и $P_4 = 42{,}5\ A$.

Перейдем теперь к оценкам третьего года. В каждом году оценка машины равна $20\ P$. В то же время оценка машины в третьем году разнится от ее же оценки в четвертом году на величину прокатной оценки четвертого года, т. е. можно записать

$$M_3 = 20P_4 + M_4 = 20 \cdot 42{,}5A + 250A = 1100A.$$

Отсюда сразу следует, что

$$P_3 = 1100A : 20 = 55A.$$

Рассуждая аналогично, можно найти оценки второго, а затем и первого годов. Все оценки приведем к одному периоду, например первому году, при этом величину A выберем так, чтобы в первом году оценка единицы продукта равнялась бы единице. Окончательные значения оценок сведены в табл. 21. Легко проверить, что для всех способов оценка продукции не превосходит оценки затрат, а для используемых в плане способов эти оценки совпадают. Ясно, следовательно, что найденные оценки являются о.о. оценками, а приведенный план оптимален.

ТАБЛИЦА 21

Год	Оценка продукта	Оценка труда	Прокатная оценка	Норма эффективности, %
I	1,0000	0,02000	10,000	36
II	0,7368	0,01579	5,263	36
III	0,5429	0,01163	3,878	32
IV	0,4100	0,00988	2,470	—

В последнем столбце табл. 21 для каждого года, кроме последнего, указана норма эффективности — приращение продукта, которое получается за счет дополнительной единицы продукта, направляемой на накопления. Поясним смысл этого понятия на нашей модели. То обстоятельство, что нормальная эффективность равна, например, 36% в первый год, означает, что выделение дополнительно 100 единиц продукции для вложений в первом году даст увеличение продукции на 136 единиц. Можно сказать, что норма эффективности служит мерой целесообразности затрат продукции на расширение производства — в каждом году осуществляются лишь те вложения, эффективность которых не ниже нормы эффективности соответствующего года. Точнее говоря, выбирая последовательно вложения по их эффективности (от больших к меньшим), мы придем к оптимальному плану.

В применении к динамической модели народного хозяйства, хотя бы и очень укрупненной, этот норматив играет колоссальную роль. Он характеризует эффективность свободных, еще не реализованных капиталовложений и позволяет учесть роль фактора времени в экономике (эти аспекты нормы эффективности будут рассмотрены в последующих главах более подробно).

Итак, мы установили, что оптимальный план характеризуется системой обусловленных оценок трудовых ресурсов, продукции и производственных мощностей (различных для каждого периода), с учетом которых производственные способы, используемые в оптимальном плане, должны быть оправданными. Такие оценки взаимосвязаны и с их помощью можно сравнивать как разнокачественные, так и разновременные затраты и эффекты. В соответствии с этим и все производственные способы (рассчитанные на ряд периодов), которые используются в оптимальном плане, «оправданы» и рентабельны, а неиспользуемые — не более чем оправданы

Справедливым является следующий общий вывод. Если для данного плана построена характеризующая его динамическая система оценок, то для суждения о целесообразности применения некоторого производственного способа, рассчитанного на ряд периодов (обычно связанного с капиталовложениями), достаточно сопоставить для него ожидаемую за все время продукцию и плановые затраты, приведя их согласно динамической системе оценок к одному периоду. Можно также произвести подсчет продукции и затрат, исходя из оценок каждого периода, и осуществить затем приведение полученных данных к одному периоду согласно коэффициентам приведения или нормам эффективности. Этот вывод играет огромную роль при построении оптимального плана для задачи перспективного планирования.

НЕКОТОРЫЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ОПТИМУМ, ВЫХОДЯЩИЕ ЗА ПРЕДЕЛЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

До сих пор мы рассматривали линейно-программные модели. Нередко, однако, возникают и такие экономические проблемы, которые недостаточно адекватно описываются этими моделями. Необходимость исследования таких проблем привела к созданию других разделов математического программирования. О них будет кратко рассказано в данной главе.

1 ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Многошаговые процессы принятия решений начали изучаться где-то в начале 50-х годов. Для этого хотя и не очень широкого, но часто встречающегося класса задач далеко не всегда пригодны методы классического математического анализа, аппарат линейного программирования или вариационное исчисление. Специальные же методы, предназначенные для исследования таких процессов, требовали разработки специальной концепции. Такая концепция, получившая название динамического программирования, была создана американским математиком Р. Беллманом и его школой. Существенный вклад в развитие методов динамического программирования сделан советскими математиками.

Прежде чем дать общее описание сущности этой концепции, как обычно, начнем с очень простой задачи, которая тем не менее позволит познакомиться с характерными чертами динамического программирования. Пусть требуется погрузить в самолет грузоподъемностью W груз, состоящий из предметов N различных типов таким образом, чтобы стоимость всего груза оказалась максимальной.

Введем следующие обозначения: P_i — вес одного предмета i-го типа; V_i — стоимость предмета i-го типа; x_i — число предметов i-го типа, загружаемых в самолет. После чего поставим вопрос о подборе для самолета допустимого груза максимальной ценности. В результате приходим к следующей экстремальной задаче.

Найти

$$\max \sum_{i=1}^{N} x_i V_i \qquad \text{(ценность груза)}$$

при условиях

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i P_i \leqslant W \qquad \text{(вес груза не превышает грузоподъемности самолета);}$$

$$(2) \qquad x_i = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(предметы неделимы).}$$

Если бы не второе условие, поставленная задача решалась бы уже хорошо знакомыми нам методами линейного программирования. Наличие же такого условия делает методы линейного программирования неприменимыми (подробнее об этом см. § 3 настоящей главы).

Для того чтобы лучше понять схему решения, опишем ее в терминах рассматриваемой задачи, т. е. на языке «загрузки самолета». Вначале загрузим самолет только предметами первого типа. Тогда максимальная стоимость груза (обозначим ее $f_1(W)$) определится как

$$f_1(W) = \max \{x_1 V_1\}$$

при условиях

$$(1') \qquad x_1 P_1 \leqslant W,$$

$$(2) \qquad x_1 = 0, 1, 2, \ldots$$

Так как $x_1 \leqslant W/P_1$, а для нахождения максимума нужно x_1 взять возможно большим, то сразу ясно, что $x_1 = [W/P_1]$ и $f_1(W) = [W/P_1]V_1$. График этой функции — ступенчатая линия (пунктирная линия на рис. 7) [1].

---

[1] Выражение $\left[\frac{W}{P_1}\right]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{W}{P_1}$.

Итак, мы знаем, чему равна максимальная стоимость груза, если вся грузоподъемность W расходуется на груз первого типа, т. е. для этого случая построена решающая функция $f_1(W)$, дающая максимальную стоимость при грузоподъемности W.

Рассмотрим теперь, что получится, если загрузить самолет предметами первого и второго типов. В этом случае максимальная стоимость загрузки обозначается че-

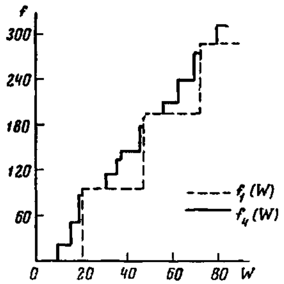


Рис. 7

рез $f_2(W)$. Если предметов второго типа взято x_2, то самолет может взять предметов первого типа по весу не более чем $W - x_2P_2$ Из сказанного выше следует, что максимальная стоимость их равна $f_1(W - x_2P_2)$, а общая стоимость груза в этом варианте будет $x_2V_2 + f_1(W - x_2P_2)$. Остается определить x_2. Ясно, что величина $f_2(W)$ — максимальная стоимость груза, состоящего из предметов первого и второго типов,— определяется как максимум для всех возможных вариантов выбора x_2, т. е.

$$f_2(W) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant \left[\frac{W}{P_2}\right]} \{x_2V_2 + f_1(W - x_2P_2)\}.$$

Продолжая действовать аналогично, т. е. всякий раз к уже имеющимся добавляя предметы еще одного типа, через N шагов придем к такому соотношению:

$$f_N(W) = \max_{0 \leqslant x_N \leqslant \left[\frac{W}{P_N}\right]} \{x_NV_N + f_{N-1}(W - x_NP_N)\}$$

(максимальная стоимость груза, состоящего из предметов N типов)	(стоимость взятых предметов N типа)	(максимальная стоимость груза, состоящего из предметов (N-1) типов с общим весом не более $W - x_NP_N$)

Из полученных рекуррентных соотношений без большого труда могут быть последовательно найдены функции $f_1(W)$, $f_2(W)$, . ., $f_N(W)$, а вместе с ними полное решение поставленной задачи

Это решение поясним на числовом примере. Пусть $W = 83$, а веса и стоимости предметов равны соответственно $P_1 = 24$, $P_2 = 22$, $P_3 = 16$, $P_4 = 10$, $V_1 = 96$, $V_2 = 85$, $V_3 = 50$, $V_4 = 20$

ТАБЛИЦА 22

W	$f_1(W)$	x_1	W	$f_1(W)$	x_1
0—23	0	0	48—71	192	2
24—47	96	1	72—87	288	3

Так как функции $f_k(W)$ потребуются нам для различных значений W (вычисляя $f_k(W)$, нужно знать $f_{k-1}(W - x_k P_k)$, будем вычислять их последовательно одну за другой при различных значениях W, фиксируя при построении $f_k(W)$ число предметов k-го типа, погружаемых в самолет. Результаты этих вычислений сведены в табл. 22—25. Они содержат значения f_1 (табл. 22), f_2 (табл. 23),

ТАБЛИЦА 23

W	$f_2(W)$	x_2	W	$f_2(W)$	x_2
0—21	0	0	48—69	192	0
22—23	85	1	70—71	277	1
24—45	96	0	72—87	288	0
46—47	181	1			

f_3 (табл. 24) и f_4 (табл. 25). Экономический смысл этих таблиц легко понять, если иметь в виду, что, например, первая строка табл. 22 означает: при грузоподъемности самолета 48—71 единиц груза он загружается двумя предметами первого типа, стоимость которых 192 денежные единицы.

ТАБЛИЦА 24

W	$f_3(W)$	x_3	W	$f_3(W)$	x_3
0—15	0	0	46—47	181	0
16—21	50	1	48—63	192	0
22—23	85	0	64—69	242	1
24—37	96	0	70—71	277	0
38—39	135	1	72—87	288	0
40—45	146	1			

ТАБЛИЦА 25

W	$f_4(W)$	x_4	W	$f_4(W)$	x_4
0—9	0	0	46—47	181	0
10—15	20	1	48—57	192	0
16—21	50	0	58—63	212	1
22—23	85	0	64—69	242	0
24—33	96	0	70—71	277	0
34—37	116	1	72—81	288	0
38—39	135	0	82—87	308	1
40—45	146	0			

На основании данных табл. 22—25 нетрудно найти оптимальный план загрузки самолета грузоподъемностью $W = 83$. Из табл. 25 находим, что максимальная стоимость груза f_4 (83) оказывается равной 308, а предметов четвертого типа следует погрузить всего один, так как $x_4 = 1$. Этот один предмет имеет вес 10, и, следовательно, предметов остальных типов можно загрузить лишь в пределах веса $83—10 = 73$. Из табл. 24 и 23 последовательно находим, что для $W = 73$ не следует грузить ни предметов третьего типа, ни предметов второго типа, т. е. $x_3 = 0$ и $x_2 = 0$ Из табл. 22 видно, что при $W = 73$ следует взять три предмета первого типа, т. е $x_1 = 3$. Окончательно наилучший план загрузки таков: следует взять 3 предмета первого типа и 1 предмет четвертого типа. Их суммарная стоимость составляет 308

По поводу только что рассмотренного примера надо сделать два замечания. Во-первых, удалось не только решить поставленную задачу (найти план загрузки самолета грузоподъемностью $W = 83$), но сделать гораздо больше. Из табл. 22—25 могут быть найдены оптимальные планы загрузки для самолетов любой грузоподъемности в пределах до 87, т. е. вместо одной задачи решен целый набор сходных между собой задач. Это характерная черта метода динамического программирования — расширив задачу, мы облегчили ее решение! Отметим также, что, поскольку метод носит явно выраженный алгорифмический характер, он легко реализуется на ЭВМ.

Вместе с тем нельзя обойти молчанием и одну принципиальную трудность, с которой приходится сталкиваться при решении задач динамического программирования. Дело в том, что для отыскания оптимального решения необходимо хранить в памяти машины обширную информацию обо всех принимаемых решениях вплоть до последнего шага (хранить таблицы типа 22—25). Если количество этих шагов велико, то необходимая информация может даже не поместиться в памяти машины. Для преодоления отмеченной трудности можно предложить такую идею — часть необходимой информации не запоминать, а перевычислять в тот момент, когда в ней возникает необходимость, иначе говоря, экономить машинную память ценой затраты дополнительного машинного времени.

Во-вторых, возможна другая интерпретация рассмотренной задачи. Стержень длиной 83 ед. нужно раскроить на такие заготовки: $l_1 = 24$, $l_2 = 22$, $l_3 = 16$, $l_4 = 10$; оценки заготовок равны соответственно $V_1 = 96$, $V_2 = 85$, $V_3 = 50$, $V_4 = 20$; требуется, чтобы суммарная оценка полученных заготовок оказалась наибольшей. Для решения подобной задачи, не опираясь на динамическое программирование, в свое время был применен метод, аналогичный вышеописанному. Сочетая метод динамического программирования с линейным программированием, можно добиться полной автоматизации решения задачи о раскрое.

Задача о загрузке самолета играла чисто иллюстративную роль, поясняя главные принципы динамического программирования. Вообще же имеется очень много практически важных задач, которые ставятся и решаются как задачи динамического программирования. Вот одна из них.

Для производства определенного продукта предполагается построить несколько предприятий. Считаются известными: суммарная производственная мощность этих предприятий, наибольшая и наименьшая производственные мощности каждого предприятия, известна также зависимость себестоимости продукции на каждом предприятии от его производственной мощности. Требуется так выбрать производственные мощности предприятий, чтобы суммарная себестоимость производства продукции была минимальной В этой задаче в роли ресурса выступает суммарная производственная мощность, а в роли способов его использования — выбор тех или иных производственных мощностей для каждого предприятия.

Перейдем теперь к более общему описанию многошаговых процессов принятия решений. Возьмем задачу распределения ресурсов, состоящую в следующем: имеется некоторое количество ресурса x, которое можно использовать N различными способами. Ресурсы и способы могут быть самой различной природы (например, в рассмотренной задаче ресурсом являлась грузоподъемность самолета, а способами использования были загрузки его различными типами предметов).

Если обозначить через x_i количество ресурса, используемое i-м способом, то каждому способу сопоставляется функция полезности $\varphi_i(x_i)$, выражающая доход от этого способа (в рассмотренной задаче эта функция была представлена величиной $V_i[x_i/P_i]$). Предполагается, что все доходы измеряются в одинаковых единицах и общий доход равен сумме доходов, полученных от использования каждого способа.

Теперь можно поставить задачу в математической форме.

Найти

$$\max\{\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \ldots + \varphi_N(x_N)\}$$

(общий доход от использования ресурсов всеми способами) при условиях

(1) $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_N \geqslant 0$ (выделяемые количества ресурсов неотрицательны);

(2) $x_1 + x_2 + \ldots + x_N = x$ (общее количество ресурсов равно x).

Для этой общей задачи могут быть построены рекуррентные соотношения

$$f_1(x) = \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant x} \{\varphi_1(x_1)\};$$

$$f_k(x) = \max_{0 \leqslant x_k \leqslant x} \{\varphi_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\},$$

$$k = 2, 3, \ldots, N,$$

с помощью которых находится ее решение.

При выводе этих рекуррентных соотношений по сути использовался следующий очевидный принцип: оптимальная стратегия обладает тем свойством, что для любого первоначального состояния после некоторого начального этапа решения совокупность последующих решений должна составлять оптимальную стратегию по отношению к состоянию, к которому пришли в результате начального этапа решения. Этот принцип, получивший название *принципа оптимальности*, лежит в основе всей концепции динамического программирования Именно благодаря ему удается при последующих переходах испытывать не все возможные варианты, а лишь оптимальные выходы. Рекуррентные соотношения позволяют заменить чрезвычайно трудоемкое вычисление максимума по N переменным в исходной задаче решением N задач, в каждой из которых максимум находится лишь по одной переменной. С их помощью могут быть решены задачи, которые иными путями решать не удается.

Все предшествующие рассуждения имели в виду задачу с одним ресурсом. Но та же идея анализа задачи, основанная на принципе оптимальности, может быть использована и в случаях, когда ресурсов несколько. Однако с увеличением размерности объем вычислений быстро растет и требования к памяти ЭВМ столь возрастают, что реально метод динамического программирования непосредственно может быть применен к задачам, включающим не больше 3—4 видов ресурсов Это отличает его от линейного программирования, где преодолимы и много бóльшие размерности.

Отметим, что метод динамического программирования широко используется и в задачах автоматического регулирования. Этот же круг задач успешно исследуется на основе принципа максимума, разработанного советским ученым акад. Л. С. Понтрягиным (см. приложение).

2. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Модифицируем задачу размещения, которая была рассмотрена во второй главе этой книги. Примем, что в этой задаче производственные затраты на единицу продукции не являются постоянными и, следовательно, производственные затраты не пропорциональны объему выпуска, а зависят от него нелинейно, т. е. функция $f_i(x_i)$, представляющая затраты на производство продукта в объеме x_i на i-м предприятии, может быть нелинейной. Производственные мощности будем считать любыми, а не обязательно принадлежащими множеству целочисленных значений. Делая такие предположения, приходим к следующей математической задаче.

Найти

$$\min_{\{x_{ij}\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) + \sum_{i,j} C_{ij} x_{ij} \right\}$$

(минимум суммарных затрат на производство и транспортировку)

при условиях

(1) $x_{ij} \geqslant 0$ (перевозятся неотрицательные количества продукта),

(2) $x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$ (произведенные количества продукта полностью доставляются потребителям);

(3) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geqslant B_j$ (каждый пункт потребления получает не меньше заданного в нем объема потребления).

Экстремальные задачи, в которых либо ограничения, либо целевая функция, либо и то и другое нелинейны, называются задачами нелинейного программирования (в нашей задаче нелинейна целевая функция). К сожалению, пока не имеется общих методов, подобных методу последовательного улучшения плана или симплекс-методу в линейном программировании, которые позволяли бы решать любые задачи нелинейного программирования. Поэтому здесь будут указаны возможности решения лишь для некоторых, впрочем, весьма важных частных случаев.

Только сначала выясним, в чем выражается «неприятный эффект» нелинейности. Для этого сопоставим задачи линейного и нелинейного программирования. Рассмотрим, как выглядит в них множество допустимых планов. В задачах линейного программирования оно выпуклое, с конечным числом крайних точек (напоминаем, что крайней точкой называется всякая точка множества,

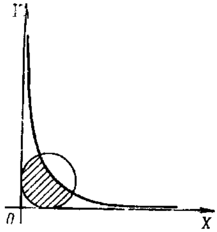


Рис. 8

которая не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего этому множеству). Это сразу становится понятным, если вспомнить, что границами множества служат гиперплоскости. В задачах же нелинейного программирования (в том случае, когда нелинейны ограничения) множество допустимых планов может быть невыпуклым, может иметь бесконечное число крайних точек.

Например, пусть допустимая область на плоскости XOY определяется ограничениями $(X-1)^2+(Y-1)^2 \leqslant \leqslant 1$; $YX \leqslant 1$. На рис. 8 видно, что эта область невыпуклая (отрезок, соединяющий любые две точки на гиперболе, не принадлежит этой области). Кроме того, все точки, лежащие на ограничивающей область дуге окружности, являются крайними, т. е. имеется бесчисленное множество крайних точек.

В том случае, когда нелинейна целевая функция, возникают другие затруднения. В первой главе было указано, что решение задачи линейного программирования обязательно находится в некоторых (возможно, в нескольких) крайних точках множества допустимых планов. Но при нелинейной целевой функции экстремум может достигаться не только на границе, но и внутри допустимой области (рис. 9).

И еще один осложняющий момент, который отличает нелинейные задачи от линейных. Целевая функция в допустимой области может иметь несколько локальных экстремумов, тогда как в линейной задаче локальный максимум или минимум обязательно является и глобальным (рис. 10). Здесь надо иметь в виду, что функция имеет в точке A локальный экстремум, если значения функции в точке A не больше (или не меньше), чем значения

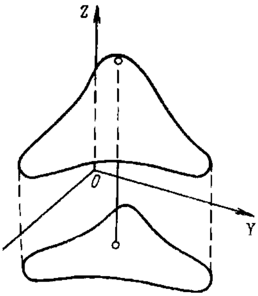


Рис. 9

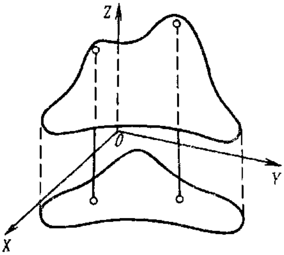


Рис. 10

функции во всех достаточно близких к A точках. Если же значение функции в точке A не больше (не меньше), чем значение ее в любой точке допустимой области, то в точке A имеется глобальный экстремум

Перечислив основные отличия нелинейных задач по сравнению с линейными, укажем некоторые возможные пути их решения.

Начнем с рассмотрения простейших задач, для решения которых иногда даже не нужны методы математического программирования. Пусть, например, требуется найти максимум функции $y = -x^2 + 8x - 14$ при условии $x \in [0,10]$. Из классического анализа известно, что наибольшее значение дифференцируемой функции может достигаться либо на концах промежутка, т. е. при $x = 0$ или $x = 10$, либо в той внутренней точке, где производная функции обращается в нуль. Таким образом, равенство нулю производной есть необходимое условие того, что экстремум достигается во внутренней точке промежутка. Если в рассматриваемой задаче вычислить производную и приравнять ее нулю, т. е. $y' = -2x + 8 = 0$, легко найти, что $x = 4$ Если максимум достигается внутри промежутка, то только при $x = 4$. Соответствующее значение функции $y(4) = 2$. Вычислим теперь значения функции на концах промежутка: $y(0) = -14$ и $y(10) = -34$. Так как где-то функция имеет максимальное значение, то очевидно, что максимум достигается при $x = 4$. Задача решена.

Проанализируем теперь причины, обусловившие возможность столь легкого решения. Во-первых, функция зависит от одной переменной; во-вторых, функция дифференцируема всюду в промежутке [0, 10]; и, в-третьих, функция задана очень простым аналитическим выражением, благодаря чему уравнение для отыскания корня производной также оказывается совсем несложным. Если бы не эти обстоятельства, то аналогичная задача могла бы стать чрезвычайно трудоемкой. К сожалению, именно такими (зависящими от многих переменных, непросто заданными и т. п.) бывают очень многие практические задачи. Поэтому классический анализ к ним неприменим, нужны более тонкие методы математического программирования.

При решении нелинейной задачи математического программирования (как многомерной, так и одномерной, и даже линейной) представляются возможными два направления. Первое из них — прямые методы нахождение экстремума, связанные с последовательным вычислением функции в некоторых точках области ее задания. Другое направление — это нахождение необходимых (или необходимых и достаточных) условий, которым должны удовлетворять координаты точки, доставляющей экстремум. Однако указанные направления не исключают друг друга и совместное использование методов того и другого типа весьма эффективно.

Так, в линейном программировании поочередное использование прямых методов и проверки необходимых условий оптимальности составляет суть описанных выше способов последовательного улучшения плана, симплекс-метода и др. В нелинейном программировании пока еще не созданы столь универсальные способы решения задач. Конечный алгорифм имеется лишь для задачи квадратичного программирования, т. е. задачи с линейными ограничениями и целевой функцией, задаваемой полиномом второй степени. Поэтому, рассматривая общую задачу нелинейного программирования, приходится демонстрировать по отдельности методы первого и методы второго направления.

Начнем с первого направления. Здесь наиболее широко применяются для решения нелинейных задач различные итеративные методы, основанные на достаточно простой идее — пошаговом приближении к точке экстремума. Если известно заранее, что целевая функция имеет единственный минимум, то поиск точки, в которой он достигается, может быть организован так. Возьмем в качестве начальной произвольную точку допустимой области и определим для этой точки то направление, в котором функция убывает с наибольшей скоростью. Сделав небольшой «шаг» в этом направлении, перейдем к новой точке. Потом снова отыскиваем наилучшее направление для перехода к очередной точке и т. д. Разумеется, это только схематическое описание общей идеи одного из итерационных процессов. Практически же нужно обоснованно выбирать величину шага, количество необходимых шагов, видоизменять поиск экстремальной точки при выходе на границу допустимой области и т. д.

Если целевая функция имеет несколько локальных минимумов или просто заранее о ней ничего не известно, то поиск экстремальной точки еще более осложняется. Это объясняется тем, что описанный процесс улучшения плана может в этом случае привести к локальному минимуму, очень далекому от глобального. Чтобы избежать такого осложнения, приходится, завершая один поиск, начинать его снова, но уже с другой начальной точки. Проделав процедуры подобного рода с различными (желательно многими) точками, можно выбрать в качестве приближенного решения задачи наименьший из полученных локальных минимумов (см. рис. 10). Чем большее число точек и районов допустимой области просмотрено, тем больше шансов, что найденный результат представляет действительное решение задачи.

Наряду с итеративными способами решения задач нелинейного программирования нередко предлагаются и другие методы. Один из них указан в 1964 г. вьетнамским математиком Хоанг Туем. Его подход основан на идее сужения допустимой области за счет отбрасывания тех частей, в которых заведомо не достигается экстремум.

В тех случаях, когда нелинейная задача обладает какой-либо специальной структурой, нередко удается использовать эту специфику при решении. Особенно важный специальный вид таких задач можно проиллюстрировать на упоминавшейся уже задаче размещения из второй главы.

Для некоторых видов производства, таких, например, как эксплуатация месторождений полезных ископаемых, представляется естественным допущение о выпуклости функции производственных затрат (экономически это означает, что затраты на единицу продукции возрастают с объемом добычи)[1]. Множество допустимых планов, определяемое условиями (1) — (3) рассматриваемой задачи,

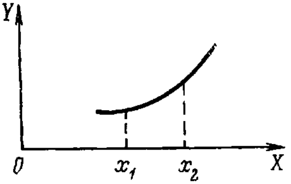


Рис 11

представляет собой выпуклый многогранник. В задаче требуется найти минимум выпуклой функции, заданной в выпуклой области. Этот класс задач носит название *выпуклого программирования.*

Доказано, что минимум выпуклой функции на выпуклом множестве точек может быть только один и, следовательно, локальный минимум совпадает с глобальным минимумом. В этом случае возможно сколь угодно точно аппроксимировать (заменять) задачу выпуклого программирования задачей линейного программирования. Для такой аппроксимации в данной задаче нужно заменить кривые $f_i(x_i)$ вписанными в них ломаными линиями (рис. 12), а затем преобразовать целевую функцию в линейную, используя уравнения звеньев этих ломаных линий и вводя дополнительные ограничения. Полученная при этом задача линейного программирования имеет точное решение, которое одновременно является приближенным ответом для исходной нелинейной задачи. Разумеется, точность такого ответа будет тем выше, чем точнее кривая аппроксимирована ломаными прямыми линиями.

---

[1] Напомним, что функция называется выпуклой, если для любой пары точек x_1 и x_2 из области ее определения (которая предполагается выпуклой) и для всех чисел λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ выполняется неравенство $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ График такой функции изображен на рис. 11.

Аппроксимация кривой линии некоторым числом ломаных прямых в рассматриваемой задаче размещения экономически соответствует замене одного нелинейно описываемого способа производства продукта на данном предприятии рядом способов производства (скажем, первой тысячи изделий, второй тысячи и т. д.), единообразно описываемых линейно, но с различными затратами.

Рис 12

Получаемый при решении такой линейно-программной задачи план и представляет приближенное решение нелинейной задачи.

Нужно иметь в виду, что изложенный метод неприменим при отсутствии условия выпуклости функции. В этом случае в план может попасть, например, выпуск третьей тысячи изделий, а выпуск первых двух тысяч не попадет в него. Иначе говоря, план будет нереальным. В случае выпуклости такого не произойдет: выпуск первых тысяч изделий как более выгодный обязательно войдет в план. Мы сделали это замечание, поскольку, к сожалению, гипотеза о выпуклости функций очень часто оказывается неправомерной. Для большинства видов производства затраты на выпуск единицы продукции обычно уменьшаются с ростом производственных мощностей, т. е. функции $f_i(x_i)$ монотонно возрастают и вогнуты — снова общая задача нелинейного программирования.

Обратимся теперь к другому направлению — нахождению необходимых (или необходимых и достаточных) условий, которым должны удовлетворять координаты точки, являющейся решением задачи нелинейного программирования. Как всегда, для иллюстрации выберем простейший случай.

Найти максимум функции

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при условиях

(1) $\qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega,$

(2) $\qquad g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 1.$

Всякой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из множества Ω можно сопоставить два числа $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Допустим для простоты, что все множество Ω отображается таким образом в выпуклое множество на

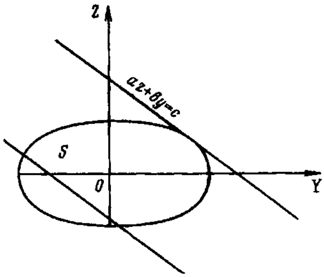


Рис. 13

плоскости YOZ (рис. 13). Понятно, что решение исходной задачи геометрически изображается точкой на границе полученного выпуклого множества S.

Покажем, как найти граничные точки множества S. На плоскости YOZ проведем прямую $az + by = c$ и станем перемещать ее параллельно самой себе до тех пор, пока она не станет касательной к выпуклому множеству S. Точки касания совпадают с граничными точками множества. Если проделать эту операцию с прямыми всевозможных направлений, то удается получить всю границу множества S. Попробуем аналитически охарактеризовать точки касания. Легко заметить, что на рис. 13 среди всех прямых данного направления прямая $az + by = c$, являющаяся касательной к множеству S, обладает таким свойством — расстояние от начала координат до касательной экстремально по сравнению с расстояниями до других прямых этого направления, имеющих общие точки с S.

Так как при фиксированных a и b расстояние от прямой до начала координат пропорционально c, приходим к следующей задаче: максимизировать величину $az + by = af(x_1, \ldots, x_n) + bg(x_1, \ldots, x_n)$. При $a \neq 0$ возникает эквивалентная задача: максимизировать величину $f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, \ldots, x_n)$, где $\lambda = b/a$. Таким образом исходную экстремальную задачу с ограничением можно свести к экстремальной задаче, но без ограничений и отысканию одного параметра — множителя λ (понятно, что аналогичный прием может быть использован и при наличии нескольких ограничений). Вновь построенная функция называется *функцией Лагранжа*, величина λ носит название *множителя Лагранжа*, а сам процесс сведения условной экстремальной задачи к безусловной задаче есть *метод множителей Лагранжа*.

Множитель Лагранжа имеет прозрачный экономический смысл. Если под $f(x_1, \ldots, x_n)$ понимать «доход», соответствующий плану $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а под $g(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$ — «издержки ресурса», соответствующие тому же плану, то величина λ имеет смысл цены (оценки) этого ресурса. Можно доказать, что если рассматривать экстремум при переменном ограничении ($g \leqslant m$), то производная экстремального значения функции f по величине ограничения с точностью до знака равна множителю Лагранжа. Иначе говоря, множитель Лагранжа характеризует скорость изменения экстремального значения целевой функции в зависимости от размера ресурса. Эта величина носит название *маргинальной оценки*.

Перейдем к описанию общей задачи нелинейного программирования.

Найти

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при условиях

$$(1) \qquad \begin{aligned} &g_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, m, \\ &x_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Построим для этой задачи функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \\ = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Можно доказать, что вектор $\bar{x}$ является решением задачи тогда, когда существует такой вектор $\bar{\lambda}$, с неотрицательными компонентами, что справедливы неравенства

$$(2) \qquad L(x, \bar{\lambda}) \leqslant L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leqslant L(\bar{x}, \lambda)$$

при всех допустимых векторах x и неотрицательных векторах λ. Пара векторов $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ называется в этом случае *седловой точкой* функции $L(x, \lambda)$. Такое «лошадиное» название связано с тем, что графически (см. рис. 14) функция $L(x, \lambda)$ в окрестности точки $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ выглядит подобно седлу. Значение этой точки очень велико. Она облегчает поиск максимума целевой функции нелинейной задачи.

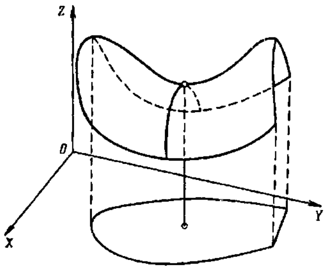


Рис. 14

Между решением общей задачи нелинейного программирования и седловой точкой функции Лагранжа существует тесная связь. Для известного оптимального вектора $\bar{x}$ можно при некоторых естественных предположениях подобрать такой вектор $\bar{\lambda}$, чтобы пара векторов $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ являлась седловой точкой функции $L(x, \lambda)$. Этот факт утверждается известной теоремой Куна и Таккера: вектор $\bar{x}$ является оптимальным вектором нелинейной задачи тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\bar{\lambda} \geqslant 0$, что пара $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции $L(x, \lambda)$. Значит, вместо того, чтобы специально решать задачу нелинейного программирования, можно (что зачастую проще) искать седловую точку функции Лагранжа $L(x, \lambda)$. Зная ее, мы будем знать и решение задачи [1]. Не будем утомлять читателей-экономистов доказатель-

[1] Тот факт, что всякую задачу нелинейного программирования можно свести к задаче поиска седловой точки соответствующей функции Лагранжа, позволяет также проверить на оптимальность каждый допустимый план $\tilde{x}$ нелинейной задачи: если удастся для него найти такой вектор $\tilde{\lambda} \geqslant 0$, что пара $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ является седловой точкой функции $L(x, \lambda)$, то план $\tilde{x}$ оптимален; если такого вектора $\tilde{\lambda} \geqslant 0$ не существует, то план не оптимален.

ством этого факта, а ограничимся его экономической интерпретацией.

Ограничения общей задачи нелинейного программирования очень часто имеют такой вид:

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = a_i - \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Постоянный вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ может интерпретироваться как наличие производственных ресурсов, а функции φ_i — как затраты этих ресурсов при выбранном плане $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, величина $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ с экономической точки зрения означает количество неиспользованного i-го ресурса при выбранном производственном плане $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ выражает доход предприятия, соответствующий плану x.

Функцию Лагранжа в этой задаче можно интерпретировать как ценностное выражение результата производства, состоящего в получении дохода и сохранении неиспользованных ресурсов, а множители Лагранжа являются здесь оценками единицы неиспользованных ресурсов разных видов. Экономический смысл седловой точки у функции Лагранжа состоит в том, что между оценками, ценами имеющихся ресурсов и величиной дохода имеется равновесие, отклоняться от которого не выгодно ни при управлении производственным процессом, ни при назначении цены на ресурсы.

Приведем еще одну экономическую задачу, которая сводится к задаче нелинейного программирования. Планируя потребление, нередко приходится использовать функцию, выражающую объем спроса на некоторый продукт в зависимости от его цены. Так как при значительном снижении цены спрос увеличивается в меньшей степени, очевидно, что эта функция нелинейна. Если требуется рассчитать план производства продукта и связанные с ним цены таким образом, чтобы объем потребления был согласован с этими ценами, а эффект от производства и потребления продукта достиг максимума, то подобная постановка приведет к типичной задаче нелинейного программирования.

Интересно сравнить роль оценок в задачах линейного и нелинейного программирования. В линейном программировании оценки оптимального плана обладают тем свойством, что исчисленные по ним затраты совпадают с оценкой получаемого «эффекта». Иначе обстоит дело в нелинейном программировании. Необходимое условие достижения оптимума состоит здесь в равенстве лишь приростных, дифференциальных затрат и «маргинального (предельного) эффекта». Знание этих величин позволяет определить, являются ли желательными те или иные изменения плана, что особенно важно при анализе эффективности отдельных мероприятий с точки зрения народнохозяйственных задач. Однако двойственное решение, одновременно устанавливающее и оптимальные затраты и оптимальный доход, в нелинейном программировании не достигается. Например, в задаче размещения, приведенной в начале этого параграфа, при нелинейной (вогнутой) функции затрат оценка продукта может оказаться ниже средних затрат на единицу продукта. Рекомендуем читателю вернуться к этой экономической интерпретации после того, как им будет прочтена пятая глава.

Несмотря на большие трудности, связанные с решением задач нелинейного программирования, в настоящее время интенсивно ведется работа по созданию новых и совершенствованию уже известных методов их решения. Это результат большой практической важности задач такого типа, их актуальности.

3 ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Задача о размещении производства уже не один раз использовалась в этой книге для разъяснения методов математического программирования. Поэксплуатируем ее еще раз. Рассмотрим небольшую, но весьма существенную модификацию этой задачи.

Пусть имеется n пунктов A_1, A_2, . . . , A_n, в которых могут быть размещены предприятия, выпускающие определенный продукт. Производственные мощности этих предприятий x_i могут принимать лишь конечное множество значений, например 1, 2, 3 конвейерные линии, 5, 7, 8 однотипных агрегатов (печей, котлов) и т. п. Собственно, число этих мощностей не только конечно, но оно не может быть дробным. Иначе говоря, производственные мощности принимают определенные целочисленные значения (точнее, кратные некоторой единице). Для каждого пункта известна зависимость производственных затрат от выпуска, т. е. функция $f_i(x_i)$. В целях упрощения будем считать ее линейной, т. е. $f_i(x_i) = C_i x_i$. Кроме того, заданы m пунктов потребления этого продукта с объемами потребления, равными соответственно $B_1, B_2, \ldots, B_m$, а также матрица транспортных затрат с элементами C_{ij}. Задача, как и раньше, состоит в размещении предприятий, определении их производственных мощностей и организации перевозок таким образом, чтобы суммарные затраты по производству и транспортировке были минимальными.

Обозначая через x_i объем продукта, производимого в i-м пункте, а x_{ij} — количество продукта, перевозимое из A_i в B_j, приходим к следующей задаче.

Найти

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} C_i x_i + \sum_{i,j} C_{ij}x_{ij}\right\}$$ (сумарные затраты по производству и транспортировке)

при условиях

(1) $x_{ij} \geqslant 0$ (перевозятся неотрицательные количества продукта);

(2) $x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$ (произведенное количество продукта полностью доставляется потребителям);

(3) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geqslant B_j$ (каждый пункт потребления получает продукт в объеме, не меньшем заданного);

(4) x_i — принимает заданные целочисленные значения [1].

[1] При решении практических вопросов особенно часто возникают такие задачи целочисленного программирования, в которых переменные принимают лишь два значения: нуль и единица. Экономически это означает, что то или иное возможное решение принимается или отвергается Например, строить или не строить домну, приобретать или не приобретать машину и т. п.

Задачи, в которых имеются ограничения типа (4) или сводящиеся к ним, получили название задач целочисленного программирования. Их отличает от линейно-программных моделей, казалось бы, сущий пустяк — добавление условия (4). Но из-за такого «пустяка» при решении подобных задач возникают большие трудности. Дело в том, что оптимальное решение в этом случае не обязательно находится в одной из вершин многогранника, задаваемого условиями (1) — (3), и обычные методы линейного программирования, использующие это обстоятельство, оказываются бессильными при решении задач целочисленного программирования.

Разработан, однако, ряд специальных методов, пригодных именно для такого класса задач. Простейший и наименее точный из них состоит в решении линейной задачи с ограничениями (1)—(3) и последующим округлением результатов так, чтобы они удовлетворяли и условию (4). Точный метод, дающий оптимальное решение целочисленной задачи, впервые был предложен американским математиком Р. Гомори.

Мы ограничимся здесь подробным изложением идеи *метода Гомори*, не останавливаясь на формальном описании алгорифмов.

Так как задача целочисленного программирования отличается от обычной задачи линейного программирования только условием (4), то естественно попытаться хоть как-нибудь использовать для ее решения хорошо разработанный аппарат линейного программирования. Так и поступим. Решим задачу линейного программирования без условия (4). Если окажется, что в оптимальном плане величины x_i принимают целочисленные значения, то исходная задача решена — условие (4) выполнилось автоматически.

Однако столь приятное событие происходит крайне редко — обычно величины x_i не принимают целочисленных значений. Чтобы лучше понять суть дела, обратимся к наглядной иллюстрации. Для простоты будем говорить о плоском случае (две переменных), хотя все рассуждения сохраняют силу и для любого числа переменных. Ограничения (1)—(3) определяют на плоскости некоторый многоугольник Q, в вершине P которого, если нет условия (4), достигается минимум целевой функции. Внутри этого многоугольника и на его границе имеется конечное множество точек R (на рис. 15 они обозначены кружочками), которым соответствуют планы с целочисленными значениями переменных.

Для дальнейшего нам потребуется ввести несколько определений. Множество R' является выпуклой оболочкой множества R, если оно состоит из всевозможных выпуклых линейных комбинаций точек множества R. *Опорным планом* задачи линейного программирования

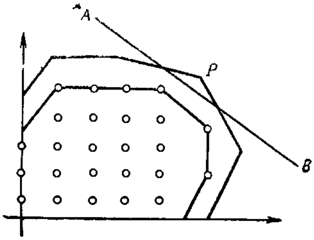


Рис. 15

называется такой план, который геометрически изображается крайней точкой многогранника допустимых планов. Те способы, которые используются в опорном плане с ненулевой интенсивностью, образуют *базис опорного плана*, а соответствующие переменные (координаты плана) называются *базисными переменными*. Естественно, остальные переменные называются небазисными.

Сравнительно легко показать, что всякий оптимальный опорный план задачи линейного программирования, рассматриваемой на множестве R', является также оптимальным опорным планом той же задачи, но рассматриваемой на дискретном множестве R. Исходя из этого утверждения вроде бы можно предложить такой способ решения задачи целочисленного программирования: а) определить множество R целых точек многоугольника ограничений Q; б) образовать его линейную выпуклую оболочку R'; в) на множестве R' решить задачу линейного программирования без условия целочисленности. Полученное решение и будет являться решением поставленной задачи.

Предложенный способ хорош всем, кроме одного — неизвестны эффективные алгорифмы построения множества R'. И этот единственный факт лишает практической ценности весь способ, поскольку описать множество R' не менее трудно, чем решить исходную целочисленную задачу. Следовательно, надо искать иной путь решения задачи. Непригодный способ состоял в том, что мы пытались сразу отбросить много «ненужных» точек из многоугольника Q (все, которые не входят в R'). Попробуем теперь сделать то же самое, но постепенно.

Заменим решение исходной целочисленной задачи линейного программирования на многоугольнике Q решением ряда задач линейного программирования на многоугольниках Q_1, Q_2, Q_3,... Здесь $Q_1 = Q$. Многоугольники эти таковы, что множество целых точек в них одно и то же. Таким образом, понятно, что если оптимальный план задачи линейного программирования на многоугольнике Q_s удовлетворяет условию целочисленности, то он является и оптимальным целочисленным планом исходной задачи. Процесс решения на этом заканчивается. Если же на многоугольнике Q_s оптимальный план не удовлетворяет условию целочисленности, то происходит переход к Q_{s+1} путем добавления одного *правильного отсечения* (на рис. 15 прямая AB). Это вновь добавленное неравенство гарантирует, что оптимальный план, в котором не выполнялось условие целочисленности, заведомо не будет даже допустимым планом в последующих задачах. Ну, а множества целых точек это неравенство не сужает. Иными словами, правильные отсечения позволяют выбрасывать заведомо ненужные точки многоугольника ограничений, не теряя при этом нужных точек. Такая идея и лежит в основе метода Гомори. Ему удалось предложить алгорифмический процесс построения правильных отсечений, не использующий ни рисунка, ни каких-либо других интуитивных соображений, что сделало бы его непригодным для решения многомерных задач. Кратко опишем этот алгорифм.

Пусть требуется найти максимум величины

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$x_j \geqslant 0$, x_j — целое число.

Обозначим через x оптимальный опорный план этой задачи. Целевую функцию x_0 и все переменные $x_1, x_2, x, \ldots, x_n$ можно выразить через небазисные переменные x_j $(j \in M)$, которые соответствуют этому оптимальному плану

$$x_i = x_{i0} + \sum_{j \in M} x_{ij} (x_j), \; i = 0, 1, \ldots, n.$$

Введем обозначение

$$\{x\} = x - [x],$$

где $[x]$ — целая часть числа x. Понятно, что $\{x\}$ представляет собой дробную часть числа x.

Это понятие используется для построения правильных отсечений на основе следующего утверждения: если план не удовлетворяет условию целочисленности, то условие

$$-\{x_{i0}\} + \sum_{j \in M} (-\{x_{ij}\})(-x_j) \geqslant 0$$

определяет правильное отсечение. Последовательное добавление правильных отсечений к исходной задаче позволяет построить упоминавшиеся ранее многоугольники $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ Р. Гомори доказал конечность такого алгорифма.

Несмотря на всю свою точность, рассмотренный метод имеет довольно ограниченную практическую ценность. Число переходов так велико, что с его помощью, даже используя самую современную вычислительную технику, удается решать только те задачи, которые имеют небольшой объем.

Поэтому для решения задач целочисленного программирования нередко применяются *методы комбинаторного анализа*. Остановимся здесь на одном из них — методе ветвей и границ. Изложим его применительно к общей задаче дискретного программирования.

Найти

$$\max f(x)$$

при условии

$$x \in G,$$

где G — некоторое конечное множество.

Для того чтобы понять идею метода в чистом виде, на минутку отвлечемся от всякой математики и рассмотрим такую ситуацию. Известно, что в мешке с монетами одинакового достоинства имеется одна фальшивая монета, отличающаяся бо́льшим весом. Как отыскать фальшивую монету? Можно, конечно, взвешивать одну за другой все монеты. Но это очень долгое дело. Лучше сделать так. Разделим содержимое мешка на две равные части и каждую взвесим, затем более тяжелую часть снова разделим пополам и будем действовать аналогичным образом, пока не доберемся до фальшивой монеты. Таков по сути принцип метода ветвей и границ: деление мешка — ветвление, взвешивание каждой части — определение соответствующих границ.

Перейдем к формальному изложению этого метода. Во многих задачах оказывается возможным определить точную верхнюю границу функции $f(x)$ на множестве всех планов G. Обозначим ее $\alpha(G)$, т. е. $f(x) \leqslant \alpha(G)$ на G. Произведем разбиение G на несколько непересекающихся подмножеств $G_1, G_2, \ldots, G_k$ — ветвление. На каждом из этих подмножеств оценим сверху функцию, т. е. определим числа $\alpha(G_1), \alpha(G_2), \ldots, \alpha(G_k)$. Если при этом удается найти некоторый план $\bar{x} \in G_r$, для которого выполняются условия

$$f(\bar{x}) = \alpha(G_r) \geqslant \alpha(G_i), \ i = 1, 2, \ldots, k,$$

то, как явствует из смысла оценок, $\bar{x}$ — оптимальный план исходной задачи. Если такой план не обнаружен, продолжаем процесс разбиения, начиная его с подмножества с самой высокой оценкой и т. д. Поскольку множество всех планов конечно, то в конце концов оптимальный план будет найден.

Покажем применение этого метода к решению конкретных задач. Как всегда, рассмотрим очень простой пример.

Найти

$$\max\{8x_1 + 6x_2\}$$

при условиях

$$(1) \qquad 3x_1 + 5x_2 \leqslant 11,$$
$$(2) \qquad 4x_1 + x_2 \leqslant 8,$$

(3) $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$

(4) x_1 — целое.

Найдем оценку сверху целевой функции на множестве планов, определяемом условиями (1)—(4). Это легко сделать, отказавшись временно от условия (4). Многоугольник, заданный условиями (1)—(3), на рис. 16 заштрихован.

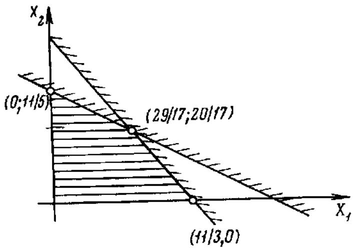


Рис. 16

Как уже говорилось, максимум линейной функции достигается в одной из вершин многоугольника ограничений. Координаты их находятся путем решения совместно соответствующих уравнений прямых. Сравнивая значения целевой функции в вершинах многоугольника ограничений, устанавливаем, что максимум достигается в точке (29/17; 20/17) и, стало быть,

$$a(G) = 8\cdot 29/17 + 6\cdot 20/17 = 352/17 = 20\,12/17.$$

Понятно, что не существует плана, удовлетворяющего условию (4), на котором бы эта оценка достигалась. Поэтому разбиваем множество допустимых планов G на две части: одна из них — G_1 содержит те допустимые планы, у которых $x_1 \leqslant 1$, во вторую — G_2 входят допустимые планы с $x_1 \geqslant 2$. Важно отметить, что при этом не потеряно ни одного допустимого плана.

Определим оценки целевой функции на таких множествах. Для этого придется решить две задачи линейного программирования.

Задача 1	Задача 2
Найти	Найти
$\max\{8x_1 + 6x_2\}$	$\max\{8x_1 + 6x_2\}$

При условиях	При условиях
$3x_1 + 5x_2 \leqslant 11;$	$3x_1 + 5x_2 \leqslant 11,$
$4x_1 + x_2 \leqslant 8;$	$4x_1 + x_2 \leqslant 8;$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0;$	$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0;$
$x_1 \leqslant 1.$	$x_1 \geqslant 2.$

Многоугольник допустимых планов задачи 1 изображен на рис. 17. Максимум достигается в точке (1; 8/5), и,

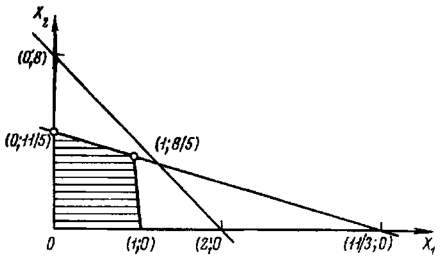


Рис 17

следовательно,

$$\alpha(G_1) = 8 \cdot 1 + 6 \cdot 8/5 = 17\ 3/5.$$

Для задачи 2 многоугольник допустимых планов вырождается в единственную точку (2,0) и, очевидно,

$$\alpha(G_2) = 8 \cdot 2 = 16.$$

Окончательно пришли к такому результату. Имеется допустимый план (1; 8/5), для которого выполняются условия

$$\{8x_1 + 6x_2\}_{(1,8/5)} = \alpha(G_1) > \alpha(G_2).$$

По сказанному выше план (1; 8/5) является оптимальным. Задача решена.

4 СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В практике планирования нередко встречаются задачи оптимизации, учитывающие случайный характер некоторых параметров. Такого рода задачи решаются методами стохастического программирования. В этих задачах случайными могут быть элементы технологической матрицы, размеры потребности (т. е. правые части ограничений), цены и другие факторы. Их случайный характер связан с тем, что невозможно, особенно при планировании на длительный период, указать значения всех коэффициентов и нормативов с полной определенностью. Они всегда могут измениться, либо по причине каких-нибудь непредвиденных событий, либо просто под влиянием времени и притом на неизвестную величину.

Вот, например, экономическая проблема, для решения которой нужны методы стохастического программирования. На предприятие по ремонту автомобилей в течение года поступают заказы на выполнение тех или иных работ. Заранее неизвестно, когда, какие и в каком количестве заказы поступят. Здравый смысл подсказывает, что если набор станков на этом предприятии мал, то оно сможет выполнять только ограниченный круг работ и будет производить их медленно. В результате заказчики предпочтут обратиться к услугам других, более совершенных предприятий (если, конечно, такие предприятия существуют), а эта авторемонтная организация будет терпеть убытки, которые естественно измерять величиной прибыли, не полученной из-за слабости материальной базы. В то же время ясно, что если набор станков очень разнообразен и число их велико, то в течение длительного срока многие станки будут бездействовать, и, следовательно, затраты на их приобретение окупятся очень не скоро.

Надо думать, что существует промежуточное оптимальное решение этой проблемы. Оно, правда, не может быть представлено как требование достичь максимума прибыли, поскольку сумма прибылей за год является случайной величиной. В подобных случаях в качестве целевой функции обычно выбирается либо математическое ожидание прибыли [1], вычисляемое на основе извест-

---

[1] Математическим ожиданием или средним значением случайной величины x, принимающей значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями, равными, соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, называется величина $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, обозначающаяся обычно $\bar{x}$.

ных вероятностей поступления заказов, либо вероятность того, что размер прибыли окажется не меньше заданного. Доказано, что решение вопроса в первом случае при условии линейности ограничений сводится к обычной задаче линейного программирования, второй же требует для своего исследования специальных методов.

Укажем еще две задачи, в которых естественно учитывать случайные факторы. При планировании сельскохозяйственного производства урожайности культур на различных участках, строго говоря, следует считать случайными, так как они зависят от погодных и других условий, предсказать которые точно невозможно. Точно так же невозможно предсказать число пассажиров, которые окажутся на той или иной авиалинии, но тем не менее необходимо определить количество самолетов, обслуживающих каждую линию. По-видимому, читатель без труда сможет пополнить список таких задач.

В чем же состоят основные трудности при решении задач стохастического программирования? Их несколько. Прежде всего далеко не всегда легко даже правильно поставить задачу, т. е. добиться того, чтобы вероятностная модель хорошо описывала изучаемый процесс. А когда такая модель построена, требуется еще создать методы для ее исследования. Все это привело к тому, что, несмотря на многочисленную литературу, этот раздел математического программирования является наименее разработанным. В основном изучаются лишь отдельные частные постановки задач и методы их решения.

Приведем две возможные постановки задачи стохастического программирования и обсудим подходы к их решению.

Рассмотрим первую постановку. В некоторых ситуациях представляется неприемлемым, чтобы при каких бы то ни было случайных воздействиях, могущих иметь место, нарушались бы предписанные ограничения. Подобная ситуация описывается, например, следующей моделью.

Найти вектор x (детерминированный[1]), доставляющий максимум математическому ожиданию линейной целевой функции

$$\sum_{j=1}^{n} C_j(\theta)\, x_j,$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta) x_j \leqslant b_i(\theta), \; i = 1, 2, \ldots, m, \; \theta \in R,$$

$$x_j \geqslant 0, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь величины $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$ и $C_j(\theta)$ принимают случайные значения в зависимости от значения, принимаемого случайным параметром θ. Каждая реализация θ определяет многогранник допустимых планов соответствующей задачи линейного программирования (реализация параметра θ носит название *состояния природы* или элементарного события, а множество возможных значений этого параметра R называется множеством возможных состояний природы или пространством элементарных событий). При любом состоянии природы должны удовлетворяться все поставленные ограничения, поэтому допустимым, естественно, считать план, который принадлежит всем возможным многогранникам допустимых планов. Если пересечение этих многогранников пусто, то допустимого плана задачи не существует.

Изложенная постановка носит название *жесткой* или *одноэтапной* задачи стохастического программирования. Выбор плана в ней должен производиться заранее, с расчетом на все возможные состояния природы, в один этап. Последующих корректировок не предполагается.

Несколько слов о методах решения. Если множество состояний природы конечно, то, очевидно, стохастическая задача может быть сведена к такой детерминированной задаче.

Найти

$$\max \sum_{j=1}^{n} \overline{C_j(\theta)}\, x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{k} x_j \leqslant b_i^{k}, \; i = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, K;$$

$$x_j \geqslant 0.$$

Здесь через $\overline{C_j(\theta)}$ обозначено среднее значение случайной величины $C_j(\theta)$, взятое относительно всех возможных состояний природы, k — число возможных состояний природы, а a_{ij}^k и b_i^k — коэффициенты, соответствующие реализации k-го состояния природы. Если число k велико, то трудность определяется большой размерностью задачи. В случае бесконечного числа состояний природы приходится устраивать подходящую конечномерную аппроксимацию.

Перейдем теперь к рассмотрению второй возможной постановки задачи стохастического программирования. Одноэтапная задача не всегда адекватно описывает реальную ситуацию. Очень часто представляется желательным и возможным корректировать план, после того как становится известным состояние природы. Постановка задачи, в которой предусмотрена такая возможность, носит название *нежесткой* или *двухэтапной* задачи стохастического программирования. Рассмотрим эту постановку на примере конкретной задачи планирования сельскохозяйственного производства в условиях неопределенности.

Пусть имеется поле площадью S гектаров, которое предполагается засеять двумя культурами с урожайностями, равными соответственно a_1 ц/га и a_2 ц/га. Известны цены на эти культуры — C_1 руб./ц и C_2 руб./ц. Предусмотрена и возможность орошения поля, причем цена воды составляет α руб./м^3. Первая культура для нормального созревания обязательно должна получать b_1 м^3/га воды, а вторая — b_2 м^3/га. Эта вода попадает в почву частично в результате дождей, частично благодаря системе орошения. Для простоты предположим, что возможен один из двух исходов: либо лето влажное, когда выпадает d_1 м^3/га воды, либо лето сухое — d_2 м^3/га воды, причем вероятность влажного лета p, а сухого — $1-p$. При таких условиях требуется составить план посева (определить площади под каждую культуру) и орошения, который обеспечивает максимум суммарного среднего дохода (математического ожидания дохода).

Введем ряд обозначений. Если x — площадь, которая отводится под первую культуру, то под вторую культуру остается площадь $S - x$. Стратегия орошения — количество кубометров воды, требующееся дополнительно на гектар поля, определяется величинами:

	Первая культура	Вторая культура
Влажное лето	y_1^1	y_2^1
Сухое лето	y_1^2	y_2^2

В результате решения должны быть найдены величины x, y_1^1, y_2^1, y_1^2 и y_2^2.

Приступим к построению модели. Так как мы предположили, что потребности каждой культуры в воде обязательно должны удовлетворяться, то должны выполняться такие равенства:

$$(1)\quad \text{Влажное лето}\begin{cases} b_1 = d_1 + y_1^1 \\ b_2 = d_1 + y_2^1 \end{cases} \quad \text{Сухое лето}\begin{cases} b_1 = d_2 + y_1^2 \\ b_2 = d_2 + y_2^2. \end{cases}$$

Величина x должна удовлетворять разумному физическому ограничению

$$(2)\qquad 0 \leqslant x \leqslant S.$$

Целевая функция, математическое ожидание чистого дохода складывается из дохода от реализации обеих культур по известным ценам минус средние затраты на орошение, исчисленные в предположении, что влажное лето случается с вероятностью p, а сухое — с вероятностью $1-p$, т. е. она может быть записана так:

$$C_1a_1x + C_2a_2(S-x) - [p(xy_1^1\alpha + (S-x)y_2^1\alpha) + (1-p)\times \\ \times(xy_1^2\alpha + (S-x)\,y_2^2\alpha)].$$

Оптимизационная задача состоит в том, чтобы найти максимум целевой функции при условиях (1) и (2). Нетрудно показать, что если из условий (1) определить величины y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2 и подставить их в целевую функцию, то в данном случае получится обычная задача на максимум линейной функции от x.

Итак, рассмотрены две возможные постановки задачи стохастического программирования. Надо сказать, что имеется и общая постановка такой задачи, но здесь не стóит ее излагать, поскольку это достаточно сложный и специальный вопрос. С помощью постановки подобных задач можно решать проблемы управления запасами при неполной информации о спросе, выбрать наилучший план внесения удобрений в почву и составить оптимальные планы осуществления многих других экономических мероприятий.

Отметим только, что в общем случае двухэтапная задача может быть сведена к задаче выпуклого программирования и поэтому для ее решения пригодны методы решения таких задач. Если же двухэтапная задача имеет линейную структуру, то она сводится к блочной задаче линейного программирования и может быть решена с помощью соответствующих специальных методов.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ

В предыдущих главах обсуждалось несколько типов оптимизационных задач, возникающих в связи с изучением различных экономических ситуаций. Можно ли найти какие-нибудь общие черты во всех этих ситуациях? Несомненно. Всякий раз мы имели дело с тем или иным множеством «продуктов», потребностями в этих «продуктах» и, наконец, с множеством действий, которые мы могли бы предпринять. Требовалось выбрать из всего множества действий такие, которые, *с нашей точки зрения*, были бы в каком-то смысле наилучшими. Еще раз подчеркнем — с нашей точки зрения. Подобный подход к принятию решений опирается на некоторые допущения. Считается, что достаточно найти количественные характеристики определенной экономической ситуации, чтобы на их основе выбрать наилучшее решение. Характеристики же эти рассматриваются как выражение объективных законов экономики, не зависящее от субъективных действий отдельных лиц.

Однако такие допущения довольно существенно огрубляют реальные отношения, которые складываются в экономике. Действие объективных экономических законов осуществляется через деятельность множества хозяйственных подразделений, интересы которых далеко не всегда полностью совпадают (например, одно и то же сырье требуется нескольким предприятиям, дефицитное изделие нужно многим потребителям и т. п.). Осуществление решения, принятого в одном из этих подразделений, может оказать значительное влияние на те или иные характеристики экономической ситуации, в которой принимают решения остальные подразделения (меняются количества сырья, цены на изделия и др.). Возникает, следовательно, комплекс оптимизационных задач, в каждой из которых какие-то переменные величины зависят от выбранных управлений в других задачах.

В тех случаях, когда между отдельными задачами, входящими в комплекс, нет противоречий, они успешно решаются методами, о которых было рассказано в предыдущих главах. Если же при решении экономических проблем возникает конфликт, вызванный противоречивыми интересами хозяйственных единиц, то изложенные выше методы оказываются недостаточными. Их следует дополнить специальным подходом, основанным на применении новой математической дисциплины — теории игр.

Небольшая историческая справка. Первым начал исследование этого круга вопросов в 20-х годах XX в. французский математик Э. Борель. Однако большого внимания эти работы не привлекли, и годом рождения теории игр как самостоятельной науки можно считать 1944 г., когда в свет вышла книга Д. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение», основывающаяся на более ранней работе самого Неймана. В последующие годы новая теория бурно развивалась, чему немало способствовала выявившаяся во время второй мировой войны возможность изучать с ее помощью различные военные задачи, а также экономические задачи в послевоенный период. К настоящему времени на счету теории игр уже множество решенных важных и трудных задач, интересная, богато разработанная теория.

Прежде чем приступить к непосредственному знакомству с этой теорией, сделаем небольшое замечание методологического характера. Нам представляется, что читателю будет легче понять теорию игр, если не излагать ее сразу во всей общности. Поэтому мы начнем с подробного изучения исторически первого раздела этой теории — игры двух лиц с нулевой суммой, более же сложные вопросы потом будут изложены лишь вкратце.

1 ИГРА ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

Здесь и в дальнейшем *игрой* будет называться совокупность правил, определяющих возможные действия участников игры — игроков. Ранее мы уже упоминали термин «стратегия», понимая под ним синоним к словам «план», «поведение», «управление». В теории игр *стратегия* — это система поведения в простейшем случае, выбор одной из имеющихся у игрока альтернатив. Игра заканчивается платежом проигравшего игрока выигравшему. Следовательно, должна быть задана *функция выигрыша* — правило, сопоставляющее величину выигрыша избранной паре стратегий.

В случае игры двух лиц естественно считать их интересы прямо противоположными — игра антагонистическая. Таким образом, выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (сумма выигрышей обоих игроков равна нулю, отсюда и название — игра с нулевой суммой). Будем рассматривать игры, в которых у каждого игрока имеется конечное число альтернатив. Функция выигрыша для такой игры двух лиц с нулевой суммой может быть задана в матричной форме (в виде *платежной матрицы*).

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Отсюда название подобных игр — матричные игры. Поясним, как происходит одноходовая игра. Игрок A выбирает одну из m строк (i-ю) платежной матрицы. Не зная результата его выбора, игрок B выбирает один из n столбцов (j-й) той же матрицы. Элемент a_{ij} определяет сумму выигрыша одного игрока и проигрыша ($-a_{ij}$) другого игрока.

Основной вопрос, который возникает здесь, состоит в следующем: существуют ли наилучшие, оптимальные способы ведения игры для каждого из игроков, т. е. имеются ли у них оптимальные стратегии? Поясним, в каком смысле следует понимать оптимальность стратегий. Каждый игрок считает своего противника «разумным», т. е. старающимся выиграть у него как можно больше. При таком предположении естественно считать стратегии игроков оптимальными, если один из них, например первый, не уменьшит своего выигрыша при любом изменении стратегии второго игрока. Соответственно второй игрок не увеличит своего проигрыша при любом изменении стратегии первого игрока. Прежде чем дать ответ на поставленный вопрос, рассмотрим несколько примеров.

Пусть задана такая платежная матрица

$$
\begin{array}{cc}
 & B \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
A \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Легко заметить, что для игрока A третья стратегия лучше всех остальных (говорят, что она доминирует над остальными стратегиями). Элементы третьей строки матрицы больше соответствующих элементов всех остальных строк. Следовательно, используя эту стратегию, игрок A сможет получить больший выигрыш, чем если бы он избрал любую другую стратегию (каково бы при этом ни было действие B). Совершенно аналогично, игроку B выгоднее всего применять первую стратегию, так как элементы первого столбца меньше соответствующих элементов всех остальных столбцов. (Напомним, что элементы платежной матрицы выражают проигрыш игрока B.) Применяя эту стратегию, игрок B потеряет меньше всего. В результате элемент матрицы $a_{3,1}$ определяет выигрыш A и проигрыш B, равный 5.

Итак, вывод. Если каждый игрок имеет стратегию, доминирующую над остальными, то эта доминирующая стратегия и является оптимальной.

Теперь более сложный пример. Платежная матрица имеет вид

$$
\begin{array}{cc}
 & B \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
A \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Как быть в этом случае? Если A выберет первую стратегию, то он может выиграть 7 (B выбирает четвертую стратегию). Так как каждый игрок считает своего противника разумным, то самое лучшее для A выбрать вторую стратегию — выигрыш во всяком случае окажется не менее 6 единиц. Точно так же игроку B выгодно выбрать вторую стратегию, ведь при этом больше 6 единиц уж он не проиграет. (При любом другом выборе не исключена возможность проигрыша больше, чем 6 единиц.) Вывод — для каждого игрока выгоднее всего выбирать свою вторую стратегию.

Обратимся к рассмотрению общего случая. Имеется платежная матрица

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Если игрок A выбирает i-ю строку, то он выигрывает по меньшей мере $\min\limits_{j} a_{ij}$. Так как i он может выбрать любым, то для него естественно постараться сделать $\min\limits_{j} a_{ij}$ возможно бо́льшим, т. е. выбирать его так, чтобы получить

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij}.$$

Игрок B, рассуждая таким же образом, может наверняка обеспечить себе выигрыш

$$-\min_{j} \max_{i} a_{ij}.$$

Итак, игрок A уверен, что он получит не меньше, чем $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$, а игрок B может помешать ему получить больше, чем $\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$. Можно показать, что для этих величин всегда справедливо неравенство

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} \leqslant \min_{j} \max_{i} a_{ij}.$$

Если же вдруг окажется, что

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} = \min_{j} \max_{i} a_{ij} = V, \qquad (*)[1]$$

[1] Если бы равенство (*) выполнялось для всякой матрицы, то вопрос о существовании оптимальных стратегий был бы тем самым решен. К сожалению, однако, такое равенство выпол-

то понятно, что те значения i и j, при которых это равенство достигается, представляют собой оптимальные стратегии игроков. Величина V носит название *цены игры*.

Так как равенство (*) обеспечивает существование оптимальных стратегий обоих игроков, то важную роль играют необходимые и достаточные условия его выполнения. К их установлению мы сейчас и перейдем. Прежде всего введем одно необходимое для дальнейшего определение: точка (i_0, j_0) называется седловой точкой матрицы, если выполняются условия

$$(1) \qquad a_{ij_0} \leqslant a_{i_0j_0} \qquad \text{для всех } i;$$

$$(2) \qquad a_{i_0j_0} \leqslant a_{i_0j} \qquad \text{для всех } j;$$

(элемент $a_{i_0j_0}$ наименьший в строке и наибольший в столбце)[1].

Пользуясь таким определением, можно сформулировать необходимые и достаточные условия выполнения равенства (*). Они содержатся в следующей теореме (которую мы приведем без доказательства): для того чтобы выполнялось условие

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij},$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица имела седловую точку. Кроме того, если (i_0, j_0) есть седловая точка матрицы, то

$$a_{i_0j_0} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Понятно, как найти оптимальные стратегии игро, ков, когда платежная матрица имеет седловую точку. Но к сожалению, многие матрицы не имеют седловых точек Как же быть с такими матрицами? Обсудим идею, которая позволила преодолеть эту трудность.

няется далеко не всегда Например, для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = 0, \text{ а } \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

[1] Это определение седловой точки рекомендуем сравнить с другим ее определением, данным в гл. III, § 2.

Стратегию, состоящую в выборе той или иной строки платежной матрицы, будем называть *чистой стратегией*. Понятно, что если матрица имеет седловую точку, то соответствующие оптимальные чистые стратегии взаимно уравновешены — ни одному из игроков не выгодно отклоняться от своей оптимальной чистой стратегии. Если же он отклонится, то выигрыш его уменьшится (или проигрыш увеличится). В том случае, когда матрица не имеет седловой точки, такой уравновешенности среди чистых стратегий уже нет. Естественно поэтому попытаться расширить множество стратегий так, чтобы в новом, более богатом множестве стратегий уже нашлись и взаимно уравновешенные пары стратегий. Для этой цели, наряду с чистыми стратегиями будем рассматривать их «вероятностные смеси», т. е. создадим ситуацию, при которой игрок не знает заранее, выбор какой альтернативы им будет сделан.

Снова рассмотрим игру с такой платежной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть игрок A решает выбрать свою первую или вторую стратегии в зависимости от исхода бросания монеты — если выпадает орел, то первая стратегия, если — решка, то вторая. Вероятности, с которыми выбираются стратегии, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ — определяют смешанную стратегию игрока A. (Конечно, она не единственна. Могли быть и другие вероятности, но осуществляемые иным механизмом.) Легко подсчитать математическое ожидание выигрыша игрока A. В нашем случае оно не зависит от того, выберет ли игрок B свою первую или вторую стратегии, и составляет $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}$.

Перейдем теперь к общему определению *смешанной стратегии*. Допустим, что игрок A для определения своей стратегии применяет метод случайного выбора, причем такой, что вероятность выбора первой строки — x_1, второй — x_2 и т. д. вплоть до x_m. Будем называть смешанной стратегией игрока A такой упорядоченный набор m чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$, который удовлетворяет двум условиям:

(1) $\qquad x_i \geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,m$

(вероятности выбора каждой строки неотрицательны);

(2) $$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

(не может быть, чтобы ни одна из m строк не была выбрана). Совершенно аналогично упорядоченный набор n чисел $y_1, \ldots, y_n$, который удовлетворяет условиям

(1) $$y_j \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, n$$

(2) $$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$

называется смешанной стратегией игрока B.

По сути дела образование смешанных стратегий игроков равносильно расширению исходной матрицы путем добавления к ней бесчисленного множества строк и столбцов. Понятно, что всякая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии — достаточно все величины x_i (или y_j), за исключением одной, положить равными нулю, а оставшийся x (или y) положить равным единице. Обратное неверно. Значит, действительно, вновь построенное множество смешанных стратегий шире множества чистых стратегий.

Поясним теперь, в каком смысле следует говорить об оптимальности смешанных стратегий. Рассмотрим простенькую задачу об A и B, которые играют в теннис. Игрок B хочет с помощью математических методов исследовать, целесообразно ли ему в игре с A выходить к сетке, или более правильно играть у задней линии. Из опытных данных предполагается известной матрица, характеризующая частоты выигрышей игрока B в зависимости от возможного расположения игроков на поле:

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \begin{array}{cc} \text{у сетки} & \text{у задней линии} \end{array} \\ A & \begin{array}{l} \text{у сетки} \\ \text{у задней линии} \end{array} & \begin{pmatrix} 40 & 60 \\ 80 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матрица показывает, что если, например, игрок B у сетки, а игрок A у задней линии, то в 80 случаях из 100 выигрывает игрок B. Столь же ясный смысл имеют и другие элементы матрицы. Эта матрица не имеет седловой точки и, значит, у игроков не существуют оптимальные чистые стратегии и они должны использовать смешанные стратегии. Пусть игрок A выбирает свою первую стратегию (игру у сетки) с вероятностью x, а вторую (игру у задней линии) — с вероятностью $1 - x$. Аналогично игрок B выбирает первую стратегию с вероятностью y, а вторую — с вероятностью $1 - y$. Вопрос состоит в том, чтобы наилучшим образом выбрать величины x и y.

Понятно, что частота выигрышей игрока B зависит от выбора величин x и y. Подсчитаем математическое ожидание этой частоты. Оно равно

$$E(x, y) = 40xy + 60x(1-y) + 80(1-x)y + 20(1-x)(1-y).$$

После элементарных преобразований получаем

$$E(x, y) = -80xy + 40x + 60y + 20.$$

Значения x и y естественно выбирать из условий экстремальности $E(x, y)$, т. е. следует взять частные производные от $E(x, y)$ по x и по y, приравнять их нулю и из этих условий найти x и y. Выполнив все эти действия, окончательно будем иметь

$$x = \frac{3}{4}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Полученный результат можно истолковать так. Ни один из игроков не имеет оптимальной чистой стратегии. Но если они будут выбирать стратегии, пользуясь подходящим случайным механизмом (таким, который для игрока B с одинаковой вероятностью выбирает каждую из двух его стратегий, а для игрока A первую стратегию выбирает с вероятностью 3/4, вторую же соответственно с вероятностью 1/4), то это лучшее, что они могут сделать. Ни одному игроку не выгодно отклоняться от указанных вероятностей, так как при этом он может только уменьшить частоту своих выигрышей. (Так как платеж-ные матрицы различны для различных игроков, мы не рекомендуем читателям-теннисистам формально использовать полученные результаты.)

Факт существования оптимальных смешанных стратегий не является случайным, присущим именно рассмотренной игре. В основной теореме теории игр утверждается: для всякой матричной игры двух игроков с нулевой суммой существуют оптимальные смешанные стратегии у каждого из игроков. Таким образом, важное свойство уравновешенности стратегий — невыгодность для каждого из игроков отклониться от своей оптимальной стратегии — сохраняется и в смешанных стратегиях.

Отметим теперь некоторые наиболее важные обобщения теории игр двух лиц с нулевой суммой, пригодные для анализа более сложных ситуаций. Прежде всего естественно рассмотреть тот случай, когда выигрыш одного игрока не равен проигрышу второго, т. е. *игру с ненулевой суммой*. Может представиться несколько вариантов подобной игры — *кооперативная* игра, в которой игроки имеют неограниченную свободу сообщений до игры, и *некооперативная*, где никакие сообщения между игроками не разрешаются.

Обратимся к кооперативной игре двух лиц с ненулевой суммой. Элементами платежной матрицы служат в ней не числа, а пары чисел. И матрица может, например, иметь вид

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & 1\ldots j\ldots n \\ A & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m \end{array} & \left(\begin{array}{cc} & \\ & \\ (\alpha_{ij}, & \beta_{ij}) \\ & \\ & \end{array} \right), \end{array}$$

что означает: если игрок A выбирает стратегию i, а игрок B стратегию j, то выигрыш A равен α_{ij}, а B — β_{ij}.

Оказывается, что для подобных игр нарушаются все основные свойства антагонистических игр — они не всегда обладают уравновешенными стратегиями, а если есть несколько уравновешенных стратегий, то они не обязательно обеспечивают одинаковый выигрыш и могут не быть взаимозаменяемы. Читатель может убедиться в этом сам, построив подходящим образом матрицу такой игры.

Иначе решается вопрос в некооперативной игре. В 1951 г. американский математик Нэш доказал, что всякая некооперативная игра с конечным множеством чистых стратегий имеет по меньшей мере одну уравновешенную пару смешанных стратегий. Если такая пара единственна, то она и обеспечивает решение игры. Если их несколько, но все они взаимозаменяемы, то говорят, что игра разрешима в смысле Нэша. При отсутствии же такой взаимозаменимости решение игры вообще не определено. (Пусть читателя не удивляют столь неполные результаты. Сложнее стал объект исследования — беднее заключения.)

Рассмотрим теперь, как изменится картина, если допускаются сообщения между игроками до игры, т. е. неантагонистическая игра двух лиц является кооперативной. Будем предполагать, что все соглашения, которые заключают игроки, обязательно должны ими выполняться. Кроме того, в результате переговоров не меняются оценки исходов игры, т. е. сохраняется исходная платежная матрица. Естественный вопрос — как найти, да и как определить, что считать решением игры в этом случае? Ради простоты дальнейшие пояснения будут носить чисто геометрический характер.

Пару чисел, выражающих выигрыши игроков A и B, будем изображать на плоскости точкой, у которой абс-

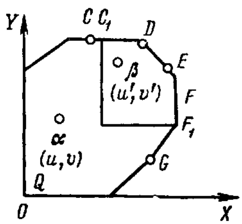


Рис. 18

цисса — выигрыш игрока A, а ордината — выигрыш игрока B. Множество выигрышей, соответствующих всем возможным смешанным стратегиям обоих игроков, представляет собой некоторое выпуклое множество Q (см. рис. 18).

Понятно, что если множеству Q принадлежат две точки α и β таких, что $u' > u$ и $v' > v$, то ни один из игроков никогда не будет выбирать стратегию, которой соответствуют платежи, изображенные точкой α — это им невыгодно. Стало быть, решение игры следует искать среди тех стратегий, которым соответствуют точки Q, расположенные на рисунке справа и вверху, т. е. точки ломаной $CDEFG$. Точки этой ломаной носят название оптимального множества Парето. Если вне этого множества сотрудничество игроков имеет смысл, то в самом оптимальном множестве Парето ни о каком сотрудничестве уже речи нет — игрок A хочет получить платеж, которому соответствует точка G, а игрок B — точка C. Так как каждый игрок при переговорах согласится получить не меньше, чем гарантированный уровень выигрыша без всяких переговоров, то из множества Парето можно выделить подмножество C_1DEFF_1, носящее название *переговорного множества игры.* В таком множестве должна быть выбрана единственная точка, которая и будет решением игры. Выбор этой точки дело не очень легкое, он во многом зависит от «разумности» критериев, лежащих в основе игровой ситуации.

Еще сложнее проблемы, возникающие при игре n лиц. Дело в том, что при $n > 2$ возможно создание коалиций, более могущественных, чем любой из игроков в отдельности. Для этих игр естественным образом обобщается понятие точки равновесия. Доказано, что всякая конечная игра n лиц имеет по меньшей мере одну точку равновесия в смешанных стратегиях. К сожалению, в этих играх нет ни взаимозаменяемости, ни эквивалентности уравновешенных стратегий, и, кроме того, оптимальное множество Парето и переговорное множество определяются гораздо более сложным образом.

Игры, которые были рассмотрены до сих пор, имели конечное множество чистых стратегий. На практике нередко оказывается необходимым изучать и такие игры, в которых игроки производят выборы из бесконечных множеств стратегий. Опишем модель подобной игры. Игрок A выбирает элемент x из множества R_1, игрок B выбирает элемент y из множества R_2 (обычно в качестве множеств R_1 и R_2 рассматривают замкнутые интервалы $[0, 1]$). Задана функция двух переменных $\Phi(x, y)$, характеризующая выигрыш первого игрока при таких выборах. Каким образом следует производить выбор каждому игроку? Игры описанного типа носят название *непрерывных игр.* Доказано, что если функция $\Phi(x, y)$ непрерывна, всегда существуют оптимальные смешанные стратегии для обоих игроков. Только понятие смешанной стратегии теперь вводится несколько иначе, с использованием более тонкого математического аппарата.

2. ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ

После того как выяснено, что оптимальные стратегии существуют, естественно, возникает другая проблема — как найти эти стратегии. Существует ряд методов, предназначенных специально для такой цели. Здесь мы обсудим два из них.

Эквивалентность матричной игры и задачи линейного программирования. Чрезвычайно важным и исключительно полезным оказался тот факт, что всякая игра двух лиц с нулевой суммой эквивалентна некоторой задаче линейного программирования. Это означает, что по заданной платежной матрице игры можно построить такую пару задач линейного программирования, решения которых определяют оптимальные стратегии обоих игроков. И, наоборот, всякой задаче линейного программирования можно сопоставить игру так, что оптимальные стратегии игроков дадут решения исходной задачи и двойственной к ней. Мы не будем приводить здесь полного доказательства эквивалентности, а ограничимся тем, что покажем, как от игры перейти к задаче линейного программирования.

Задана платежная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пусть игрок A будет выбирать свои стратегии с вероятностями, равными соответственно $x_1, \ldots, x_m$ ($\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, $x_i \geqslant 0$). Если игрок B выбирает свою первую стратегию, то ожидаемый выигрыш игрока A составит

$$A_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{m1}x_m,$$

если B выбирает вторую стратегию, то выигрыш составляет

$$A_2 = a_{12}x_1 + \ldots + a_{m2}x_m$$

и т. д. вплоть до n-й стратегии, которой соответствует выигрыш игрока A, равный

$$A_n = a_{1n}x_1 + \ldots + a_{mn}x_m.$$

Понятно, что наименьший выигрыш, который может получить A, равен $\min\limits_i A_i$. Обозначим эту величину через x_{m+1}, т. е. $x_{m+1} = \min\limits_i A_i$. Так как игрок A хочет добиться максимально возможного наименьшего выигрыша, то, выбирая свою стратегию, он должен решить следующую задачу.

Найти

$$\max \{x_{m+1}\}$$

при ограничениях

$$(1) \quad \begin{aligned} &a_{11}x_1 + \ldots + a_{m1}x_m - x_{m+1} \geqslant 0 \\ &a_{1n}x_1 + \ldots + a_{mn}x_m - x_{m+1} \geqslant 0 \end{aligned}$$

(величина x_{m+1} не превосходит ожидаемого выигрыша игрока A ни при одной из стратегий игрока B)

$$(2) \quad \begin{aligned} &x_1 + x_2 + \ldots = x_m = 1 \\ &x_1 \geqslant 0, \ldots, x_m \geqslant 0 \end{aligned}$$

(условия, которым должна удовлетворять всякая смешанная стратегия).

Легко заметить, что целевая функция и ограничения, полученные нами, выражают задачу линейного программирования. Совершенно аналогичные рассуждения показывают, что игрок B, отыскивая оптимальную стратегию, должен также решать задачу линейного программирования, только не на максимум, а на минимум. Тем самым доказана возможность сведения игры к решению двух задач линейного программирования. Так как аппарат линейного программирования очень хорошо разработан, возможности отыскания оптимальных стратегий в матричных играх существенно расширяются.

Итеративный метод решения игр (*метод Брауна*). В 1951 г. американский математик Браун предложил метод отыскания оптимальных стратегий в матричных играх, опирающийся на известное правило — принимать то или иное решение на основании изучения предыстории, накопленного опыта. Суть метода состоит в том, что игроки, прежде чем сделать ход, разыгрывают как бы «в уме» целый ряд фиктивных партий, учитывая стратегии друг друга и всякий раз выбирая оптимальную чистую стратегию против смешанной стратегии по всем прошлым партиям противника.

Только что прочитанная фраза трудна для понимания. Поясним ее примером. Пусть платежная матрица имеет вид

$$\begin{array}{cc} & B \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ A \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Последовательность фиктивных партий опишем в виде этапов (итераций), на каждом из которых тот или иной игрок выбирает свою стратегию.

П е р в а я п а р т и я

I этап. Игрок A выбирает любую из своих стратегий, например стратегию 3, и результат выбора сообщает игроку B.

II этап. Игрок B выбирает лучший ответ на этот ход — свою стратегию 2.

В т о р а я п а р т и я

III этап. Игрок A, зная, что B выбирал стратегию 2, отвечает на нее лучшим образом — своей стратегией 1.

IV этап. Игрок B знает, что A один раз применял стратегию 3 и один раз — стратегию 1. Он ищет поэтому наилучший ответ против смешанной стратегии (1/2, 0, 1/2), т. е. стратегии 1 и 3 равновероятны, стратегия 2 не используется. Таким ответом служит стратегия 3, так как ей соответствует наименьший ожидаемый проигрыш в 3 единицы.

Третья партия

V этап. Игрок A знает, что B один раз применял стратегию 2 и один раз — стратегию 3, т. е. ему нужно отвечать на смешанную стратегию (0, 1/2, 1/2). Лучший ответ — стратегия 2 или стратегия 3, так как они дают одинаковый ожидаемый выигрыш в 8/3 единицы.

В результате разыгрывания трех фиктивных партий получены такие приближенные смешанные стратегии: для игрока A — (0, 1/2, 1/2); для игрока B — (1/3, 1/3, 1/3). Процесс улучшения этих стратегий путем «обучения на опыте» может быть продолжен сколь угодно долго.

На каждом этапе каждый игрок старается максимизировать свой средний выигрыш, считая, что противник будет использовать свои стратегии с теми же частотами, что и до этого этапа. Доказано, что если каждый из игроков имеет единственную оптимальную смешанную стратегию, то при неограниченном увеличении числа партий находимые описанным выше путем приближенные смешанные стратегии стремятся к оптимальным стратегиям обоих игроков. Правда, для достижения оптимума требуется очень много времени, что резко снижает практическую ценность итеративного метода.

3. ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

До сих пор изложение теории игр было у нас довольно далеким от экономики, если, конечно, не считать, что «выигрыш» и «проигрыш», когда они выражают некие денежные суммы, могут рассматриваться как экономические термины. Но настала пора покинуть мир абстрактных математических моделей и ступить на конкретную почву хозяйственных связей и отношений.

Пусть экономическая система состоит из n предприятий и каждое из них выступает и в роли поставщика, и в роли потребителя. Например, предприятие k характеризуется множеством производственных возможностей Q_k. Элементы этого множества — векторы x_k — определеляют количества затрачиваемых и выпускаемых ингредиентов (отрицательные компоненты определяют затраты, а положительные — выпуск). Таким образом, хозяйственная самостоятельность предприятия моделируется возможностью выбора векторов x_k из множества Q_k.

Однако такое описание недостаточно. Ведь предприятие k, так же как и все остальные предприятия, не независимо. Между предприятиями существуют определенные связи, а также имеются общие ограничения, характеризующие систему в целом. Такие ограничения можно представить как

$$A(x) \geqslant b,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $A(x)$ — известная вектор-функция, а b — s-мерный заданный вектор. За соблюдение общих ограничений отвечает $(n+1)$-й участник экономической системы — некий планирующий орган (назовем его ПО).

Каждый участник экономической системы имеет свою цель. ПО стремится обеспечить максимально возможную прибыль в масштабах всей системы $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Предприятия же хотят максимизировать свои прибыли, исчисленные по существующим ценам. Налицо конфликтная ситуация — каждое предприятие заинтересовано в повышении цен на свою продукцию и в снижении цен на потребляемые ингредиенты. Какую же стратегию следует выбирать каждому предприятию, т. е. какие векторы затрат и выпуска выбирать и как назначать цены на продукцию?

Если сделать ряд сугубо математических предположений относительно вида различных множеств и функций, упомянутых в описании экономической ситуации, то можно доказать следующий интересный факт. В данной модели существуют равновесные стратегии для каждого предприятия (отклонение от которых не выгодно никому), а также соответствующие им цены (которые устанавливаются ПО) на все ингредиенты, производимые и потребляемые в системе.

Отыскание равновесных стратегий может быть организовано в виде следующего многошагового процесса. На каждом шаге ПО назначает цены на все ингредиенты, имеющиеся в системе, и предлагает предприятиям выбирать такие производственные программы, которые при этих ценах максимизируют их прибыль. Предприятия решают свои локальные задачи максимизации и сообщают оптимальные решения в ПО. На основании полученной информации ПО уточняет локальные ограничения и определяет лучший план и новые цены. Далее процесс повторяется. Если на двух последующих шагах планы предприятий не изменятся, значит найдено оптимальное решение. В противном случае каждый следующий шаг ведет к увеличению глобальной прибыли системы.

Рассмотренная ситуация довольно условна. Чтобы сделать ее немного реалистичнее, нужно привлечь более сложный и более тонкий аппарат теории игр.

Пусть имеется n предприятий, производящих s различных продуктов. Предприятие j выбирает свой производственный план y_j из множества возможных планов Y_j. Наряду с предприятиями имеются и потребители, которые покупают продукты по ценам $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Множества x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — наборы различных продуктов, доступные i-му потребителю. Предполагается, что предпочтение, которое i-й потребитель оказывает различным наборам продуктов, устанавливается функцией предпочтения $U_i(x)$, где x — выбранный набор. Будем считать, что вся прибыль предприятий выплачивается потребителями таким образом, что i-й потребитель получает долю α_{ij} прибыли j-го предприятия. Понятно, что

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} = 1 \text{ при } j = 1, \ldots, n.$$

Налицо конфликтная ситуация. С одной стороны — предприятия, стремящиеся максимизировать свою прибыль, заинтересованы в повышении цен. С другой стороны — потребители, стремящиеся максимизировать полезность приобретенных продуктов в условиях ограниченности средств, заинтересованы в снижении цен. Какой стратегии должна следовать каждая из сторон?

Делая ряд предположений относительно множеств Y_j, X_i и функции предпочтения $U(x)$, возможно доказать следующий факт — для описываемой модели существует конкурентное равновесие. Это означает, что можно найти такие величины $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{s} \bar{p}_k \bar{y}_{kj} = \max_{y_j \in Y_j} \sum_{k=1}^{s} \bar{p}_k y_{kj}$$

(здесь y_{kj} — количество k-го продукта. выпускаемое в j-м производственном плане. Равенство утверждает, что прибыли предприятий максимальны, когда в качестве цен назначены равновесные цены).

Набор $\bar{x}_i$ при всех i максимизирует $U_i(x)$ на множестве

$$(2) \qquad \left\{ x \mid x \in X_i, \ \sum_{k=1}^{s} \bar{p}_k x_{ki} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \sum_{k=1}^{s} \bar{p}_k \bar{y}_{kj} \right\}$$

(здесь x_{ki} — количество k-го продукта в наборе потребления x i-го потребителя. Это условие означает, что i-й потребитель максимизирует пользу от приобретаемых им продуктов по таким наборам этих продуктов, которые, во-первых, принадлежат множеству доступных для него наборов, а, во-вторых, приобретение их укладывается в имеющиеся у него финансовые ресурсы).

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ki} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_{kj}$$

при всех k. Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{s} \bar{p}_k \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{y}_{kj} - \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ki} \right) = 0$$

(спрос должен быть удовлетворен. Если же какого-нибудь продукта производится больше, чем требуется, то цена его равна нулю).

Итак, состояние равновесия в экономике — это такое положение, когда ни одно предприятие не может добиться большей прибыли при сложившихся ценах и ни один потребитель не может приобрести больше без дополнительных затрат. «Игрокам» не выгодно отклоняться от своих оптимальных смешанных стратегий.

Описанная модель принадлежит известным американским математикам-экономистам Эрроу и Дебре. Ситуация, которая формулируется ею, несколько более реалистична, чем та, что рассматривалась в начале параграфа. Однако и эта ситуация достаточно условна. Вообще игровые модели экономики имеют пока не столько практическое, сколько методологическое значение. Они, пожалуй, только еще прокладывают пути, которые в будущем найдут широкое использование в управлении процессом общественного производства.

4 ДЕЛОВЫЕ ИГРЫ

Выше было рассмотрено много различных ситуаций, в которых может возникнуть необходимость в принятии решения. Во всех этих ситуациях поиск оптимального решения осуществлялся следующим образом: сначала строилась математическая модель, потом, в результате ее исследования, отыскивалось оптимальное решение. Однако такая схема действительна далеко не для всех случаев. Зачастую оказывается, что построение модели вызывает непреодолимые трудности или, если она уже построена, не представляется возможным осуществить ее исследование.

Но решения не могут не приниматься — без них нет сознательной деятельности — и желательно, чтобы решения эти были хорошими. На основании чего принимаются решения? Вот маленькая иллюстрация, которая позволит ответить на этот вопрос.

Представьте себе, что Некто приобрел автомобиль и решил научиться водить его. Для этого существуют разные способы. Наиболее просто: прочесть в инструкции, как завести двигатель, сесть в машину и выехать на дорогу. Если Некто не погибнет в аварии, то через некоторое время он научится водить автомобиль. Но скорее всего все-таки, он попадет в аварию! Другая возможность — познакомиться с литературой, изучить «теорию» вопроса, и уже имея такую основу, постепенно переходить к практике вождения. Наш Некто в этом случае будет осведомлен об основных условиях вождения машины, но в исключительных обстоятельствах он может не найти правильного решения. Ведь в учебниках всего не опишешь.

Наконец, третий путь: под руководством опытных преподавателей на специально оборудованных полигонах с искусственно сооруженными препятствиями наш Некто обучается мастерству вождения машины. Здесь он, «играя», попадает в очень сложные ситуации, и после того как ему удастся найти выходы из них, управление машиной в обычных условиях будет для него легким делом.

Примерно так же обстоит дело с принятием решений и в любых других вопросах. Люди обучаются искусству принятия хороших решений или в самом процессе принятия решений (сравните с первым способом обучения вождению машины и его последствиями), или на основе теоретической подготовки (второй способ), или с помощью деловых игр. Мы не будем останавливаться на первых двух способах, так как они широко известны и используются во всей многогранной человеческой деятельности. А вот третий способ, к сожалению, значительно менее известен. Поэтому рассмотрим его подробнее. Итак, что же такое деловые игры?

Изучая какую-нибудь конкретную ситуацию, строя ее математическую модель, мы в значительной мере обезличиваем действительность. Например, когда во второй главе рассматривалась задача о выборе производственной программы, то при этом не учитывались ни возможные поломки каких-нибудь станков, ни взаимоотношения между работающими, ни многое другое. Некоторые случайности, как было показано в третьей главе, можно учесть, если вместо линейно-программной модели построить модель стохастического программирования. А что делать с целым рядом других аспектов производственной деятельности, каким образом, например, ввести в модель отношения между людьми, цели, у них имеющиеся, и другие не поддающиеся измерению факторы, довольно сильно влияющие на экономические показатели?

Оказывается это можно сделать, но несколько необычным способом. Нужно, чтобы неучитываемые показатели, отношения между людьми, моделировали сами люди. Делается это так. Изучая реальную ситуацию, мы сопоставляем ей не математическую модель, а обстановку «условной практики», в которой действующие лица «играют» то, что совершается в действительности. Иными словами, пишется сценарий данной экономической ситуации и участники «представления» принимают те решения, которые должны привести к наилучшему результату.

Деловые игры обычно строятся двумя способами. При первом из них каждый участник получает перед игрой точные инструкции о том, как он должен действовать. Арбитр, наблюдающий за ходом игры, оценивает ее результаты. Если он считает, что игра идет хорошо, то в дальнейшем эти инструкции сохраняются. В противном случае они изменяются арбитром и игра повторяется сначала. Второй способ заключается в том, что перед началом игры ее участники получают не точные инструкции, а лишь примерное описание своих действий. Во время игры под руководством арбитра осуществляется апробирование различных стратегий игроков. Оно продолжается до тех пор, пока игра не будет признана хорошей. Лишь тогда точно фиксирутся инструкции для участников игры.

Оба способа требуют оценки игры — хорошо она идет или плохо. Если моделируемая игрой ситуация допускает построение математической модели, которая может быть реализована на ЭВМ, то игра признается тем лучшей, чем ближе ее результат к машинному решению. Если же машинного решения не имеется, то проводится экспертная оценка.

Поясним сказанное примером. Пусть мы хотим научиться наилучшим образом управлять заводом. Для этого некоторое число людей — участники игры — распределяют между собой обязанности лиц, принимающих решения на заводе. Так появляются «фиктивные» директор, главный инженер, начальники отделов и цехов, инженеры, мастера и др. В условной обстановке, воспроизводящей действительность, эти участники игры приступают к «работе» — они вступают друг с другом в деловые контакты, моделирующие действительно возникающие на заводе отношения. В ходе этих контактов, строго регулируемых на основе действующих на заводе правил, принимаются «производственные» решения. Участники имеют возможность в ходе проводимой игры оценивать результаты принимаемых ими решений — для этого еще до начала их действий создается математическая модель процесса, который игроки должны оптимизировать. Эта модель, с одной стороны, позволяет контролировать принимаемые решения. С другой же стороны, подобное проигрывание действительности (т. е. сама деловая игра) помогает уточнить модель, отразить в ней не замеченные первоначально существенные черты.

Приведенный пример дает возможность указать две взаимосвязанные и дополняющие друг друга роли деловых игр. Во-первых, эти игры выполняют учебную роль. Их участники обучаются принимать оптимальные или близкие к оптимальным решения, оценивая последствия своих действий. Для контроля нередко используется математическая модель. В ходе игры участники приобретают опыт руководства, анализа информации, относящейся к их деятельности, опыт принятия решений. Во-вторых, деловым играм присуща исследовательская роль. Участники такой игры уточняют модель, могут испробовать различные целевые функции и выбрать лучшую, проверить в обстановке условной практики те или иные спорные положения, что особенно ценно перед проведением новых экономических мероприятий.

Деловая игра ближе к реальной действительности, чем просто математическая модель, и потому процесс обучения с ее помощью оказывается очень эффективным. Это повышение эффективности обусловлено некоторыми важными особенностями деловых игр. Так, при их реализации игроки могут быстро понять, хорошо они играют или плохо, и в последнем случае соответствующим образом изменить свою игру. Действия одного игрока отражаются на положении других и если он сам не обнаружит своей ошибки, то «конкуренты» воспользуются ей, а «партнеры» будут страдать, и это заставит игрока больше не делать таких ошибок в аналогичных ситуациях.

Наряду с более или менее полным описанием конкретной ситуации при проведении игры, может быть запланировано моделирование и разного рода помех, инцидентов, встречающихся в реальной жизни. В общем, можно сказать, что одно из самых ценных качеств практического работника — опыт, который в обычных условиях приобретается годами, с помощью деловой игры накапливается в считанные недели. Для современного высокоразвитого производства, где опыт и практика принятия решений играют колоссальную роль, наличие такой возможности трудно переоценить.

Деловые игры могут стать важным оружием в арсенале управления производством. Об этом свидетельствует история их «близкого родственника» — военных игр, которые известны еще с древности, и до сих пор не утратили своей ценности; в большинстве армий мира такие игры (маневры, штабные учения и т. п.) и сейчас используются для обучения солдат и офицеров. Да и у самих деловых игр тоже есть биография, насчитывающая уже несколько десятилетий. В тридцатые годы нашего века в Ленинграде начали проводиться одни из первых в мире деловых экономических игр. В основном они носили учебный характер — работники предприятий «репетировали» свою деятельность в обстановке условной практики и таким путем довольно быстро приобретали необходимый практический опыт. Затем в течение длительного времени работы в этом направлении в Советском Союзе не велись. В пятидесятые годы этот экспериментальный метод моделирования был заново переоткрыт в США, приобрел популярность и начал быстро распространяться.

В настоящее время в мировой литературе описаны сотни деловых экономических игр. Они весьма разнообразны как по уровням, так и по целям. Есть игры, моделирующие производственную деятельность отдельного участка предприятия, всего предприятия, отрасли производства и даже всей экономической системы.

В нашей стране деловые игры пока еще не нашли широкого развития, хотя некоторые работы по их созданию и использованию уже проведены. Пионерами здесь снова выступили ленинградцы (на этот раз лаборатория экономико-математических методов ЛГУ), начаты работы в Новосибирском Государственном университете, Ростовском научно-исследовательском институте механики и прикладной математики и некоторых других учреждениях.

ГЛАВА ПЯТАЯ

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

До сих пор в этой книге рассматривались лишь сравнительно частные экономические задачи. Для их решения, как мы стремились показать, целесообразен подход с точки зрения концепции математического оптимального планирования. Но в экономике существуют не только локальные проблемы. Кроме них имеются глобальные народнохозяйственные или, иначе, макроэкономические задачи. Обсуждению некоторых методов решения таких задач посвящена эта глава.

Всякая математическая модель реального явления, процесса представляет ценность постольку, поскольку она позволяет установить новые закономерности, предсказывать, как будет происходить моделируемое явление, процесс. Особой ценностью обладают макроэкономические модели, так как на их основе может осуществляться прогнозирование развития всего народного хозяйства, могут даваться количественные рекомендации по выбору распределения средств, могут оцениваться осуществимые темпы роста общественного производства в целом. Это модели наивысшего уровня, они являются «последней инстанцией», суммирующей итог всех локальных решений.

Нужно отметить, что переход к макроэкономическим моделям связан не просто с увеличением размерности уже рассмотренных задач. Здесь возникают многие новые вопросы, специфические для моделей народнохозяйственного планирования, построение и исследование которых возможно лишь на базе сочетания традиционных методов экономического анализа, с арсеналом статистических и математико-экономических методов.

Рассматриваемый класс моделей описывает сложные экономические комплексы, охватывающие многочисленные объекты и явления, деятельность которых далеко не детерминирована. Охватить их все непосредственно в одной модели пока не представляется возможным. Необходимо проводить агрегирование (объединение) данных с тем, чтобы объем используемой информации оказался достаточно обозримым и компактным, обеспечивал возможность обработки и анализа. Такое агрегирование осуществляется путем объединения более или менее однородных элементов экономической структуры в группы, для которых принимаются некоторые усредненные характеристики.

Из колоссального множества производственных факторов в модель обычно включаются лишь наиболее важные — труд, производственные фонды и т. п. Производства близких отраслей группируются в модели в секторы хозяйства. Для каждого сектора предполагается известной (это очень важно для использования модели в прогнозировании[1]) скорость, с которой инвестиции в данном секторе обращаются в основные фонды, т. е., как говорят, известен лаг (период «созревания» инвестиций). При этом данные для макроэкономических моделей, сколько-нибудь удовлетворительно описывающие реальную экономику, могут быть получены лишь с помощью глубокого статистического анализа существующей экономической информации, анализа, позволяющего выявить те глобальные характеристики экономики, которые кладутся в основу макроэкономической модели.

Знакомство с макроэкономическими моделями начнем с проблемы анализа плана народного хозяйства в его отраслевой структуре как комплекса ряда производственных отраслей при требовании сбалансированности.

1 МЕЖОТРАСЛЕВОЙ БАЛАНС

Нужды высокоразвитого хозяйства, являющегося типичным для XX в., и в особенности нужды планируемой, управляемой экономики, возникшей в результате социалистической революции, вызвали потребность в конкретных и развернутых экономических показателях и характеристиках. Одной из форм практической реализации этой потребности было создание схемы межотраслевого баланса. Впервые эта схема была разработана в 20-х годах советскими учеными, затем она получила развитие в работах американского экономиста В. Леонтьева, а с 50-х годов широко используется для совершенствования народнохозяйственного планирования в СССР (см. гл. VI, § 4).

Идея межотраслевого баланса чрезвычайно проста. Ее может легко усвоить любой человек. Ведь получив заработную плату, он должен распределить, куда уйдут его деньги. А это (хотя человек того и не подозревает) и есть составление балансовых отношений в их простейшей форме. На той же идее сопоставления затрат и результатов основан и межотраслевой баланс. Он называется так потому, что балансовые отношения, включенные в него, характеризуют взаимосвязи между различными отраслями народного хозяйства.

В табл. 26 схематически изображены балансовые соотношения отраслей. Как их следует понимать? Примем условно, что в народном хозяйстве имеются только четыре отрасли: 1 — производство электроэнергии, 2 — топливная промышленность, 3 — черная металлургия и 4 — легкая промышленность. В таблице величина x_{ij} выражает объем продукции i-й отрасли, затрачиваемой при функционировании j-й отрасли. В соответствии с принятыми условиями это означает, что продукция первой отрасли распределяется на следующие нужды: x_{11} — количество электроэнергии, затрачиваемое при производстве электроэнергии; x_{12} — количество электроэнергии, затрачиваемое в топливной промышленности. Электроэнергия расходуется и в черной металлургии, и в легкой промышленности, потребности которых определят соответственно величины x_{13} и x_{14}.

Однако электроэнергию потребляют не только отрасли производства. Потребителями являются население, государственные и культурные учреждения. Обозначим объем конечного продукта i-й отрасли через V_i. Он складывается из непроизводственного потребления α_i (включая и вложения в непроизводственные фонды) и накопления — вложения в производственные фонды β_i. Через U_i обозначим объем продукции i-й отрасли, затрачиваемой при функционировании всех четырех отраслей. Через W_i обозначим общий объем производства i-й отрасли. Тогда приходим к следующим соотношениям:

$$W_i = U_i + V_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

ТАБЛИЦА 26

		Отрасли производства				Текущее производственное потребление	Конечный продукт				Общая продукция
		1	2	...	n		Текущее непроизводственное потребление	вложения в производственные фонды	вложения в непроизводственные фонды		
Отрасли производства	1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	U_1	α_1	β_1			W_1
	2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	U_2	α_2	β_2			W_2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	U_n	α_n	β_n			W_n
Амортизационные отчисления		γ_1	γ_2	...	γ_n						
Заработная плата		Z_1	Z_2	...	Z_n						
Доход		δ_1	δ_2	...	δ_n						
Общая продукция		W_1	W_2	...	W_n						

где

$$U_i = \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \text{ и } V_i = \alpha_i + \beta_i.$$

Эти уравнения получаются в результате суммирования по строкам табл. 26 и указывают, как используется и распределяется производственная продукция. Например, первые из них ($i = 1$) означают, что вся произведенная электроэнергия (W_1) распределяется между четырьмя отраслями производства ($U_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$), непроизводственным потреблением и накоплением ($V_1 = \alpha_1 + \beta_1$).

Однако отрасль можно анализировать не только с точки зрения распределения ее продукции, а и с точки зрения затрат на производство в данной отрасли. Так, для получения продукции черной металлургии требуются и электроэнергия, и топливо, и изделия легкой промышленности (спецодежда и т. п.). Помимо этого, в j-й отрасли имеются затраты на амортизационные отчисления (γ_j), на заработную плату (Z_j), а также доход (δ_j), возникающий при реализации продукта отрасли. Таким образом, для затрат на производство продукции j-й отрасли можно записать следующее равенство:

$$W_j = \sum_{i=1}^{4} x_{ij} + Z_j + \delta_j + \gamma_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Последнее из этих уравнений ($j = 4$) означает, согласно принятым выше условиям, что стоимость продукции легкой промышленности равна стоимости затраченных в ней продуктов всех четырех отраслей и амортизации плюс заработная плата работников легкой промышленности и доход, полученный от реализации продуктов легкой промышленности[1]. Аналогичным образом, но, понятно, для своих отраслей трактуются и остальные уравнения.

Рассмотренные балансовые соотношения очень важны, так как на их основе могут рассчитываться чрезвычайно существенные экономические характеристики — коэффи-

[1] Матрица (таблица) межотраслевого баланса может строиться как в натуральных единицах измерения (тонны металла и т. п.), так и в стоимостной форме (в каких-то базовых неизменных ценах). Здесь имеется в виду именно последняя форма баланса.

циенты прямых и полных затрат. *Коэффициент прямых затрат* характеризует средний расход продукта i-й отрасли на выпуск единицы продукта j-й отрасли. Он обозначается a_{ij} и, например, в принятых выше символах коэффициент прямых затрат электроэнергии на продукцию металлургии имеет вид $a_{13} = x_{13}/W_3$.

Однако расход электроэнергии на выпуск металла не исчерпывается прямыми ее затратами. В производстве металла участвует топливо, на создание которого была использована электроэнергия, а также многие другие ингредиенты, производство которых тоже потребовало затрат электроэнергии. Все эти затраты должны быть учтены как связанные с выпуском металла. Добавив к прямым затратам электроэнергии в металлургии ее расход в смежных отраслях (в той части, в которой эти отрасли участвуют в производстве металла), после соответствующих пересчетов получаем коэффициент полных затрат электроэнергии на выпуск металла.

Коэффициент полных затрат, который обозначается через c_{ij}, характеризует, сколько всего нужно произвести продукции в i-й отрасли, чтобы обеспечить выпуск продукции в отрасли j. Математически полные затраты находятся с помощью специального приема — обращения матрицы. Используя этот прием, рассчитывают все коэффициенты полных затрат. Понятно, что полные затраты могут существенно отличаться от прямых затрат. Так, в межотраслевом балансе СССР за 1959 г., охватывавшем 83 отрасли, прямые затраты черного металла на производство электроэнергии составляли 14,4 руб. на тысячу рублей продукции, тогда как полные затраты были равны 45,4 руб.

Поясним, каким образом используется межотраслевой баланс в планировании производства. Уравнения (1) в случае любого числа отраслей имеют вид

$$W_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + V_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

а так как $a_{ij} = x_{ij}/W_j$, то это соотношение можно преобразовать в

$$(2) \qquad W_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j + V_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Получена система n уравнений с $2n$ неизвестными — общими объемами производства всех отраслей и их же конечными продуктами. Поскольку неизвестных больше, чем уравнений, то эта система неопределенна. Для того чтобы сделать ее определенной, необходимо, исходя из каких-то соображений, указать n из этих величин. На практике обычно по некоторым отраслям задаются уровни конечного продукта (как правило, по тем, которые по преимуществу служат для удовлетворения общественных и личных потребностей), по другим же, играющим главную роль в материальном производстве, задаются общие объемы выпуска.

Покажем, каким образом осуществляется решение системы уравнений межотраслевого баланса. Систему (2) можно записать в матричной форме как

$$(2') \qquad W = AW + V,$$

где W — вектор объемов производства; V — вектор уровней конечного продукта; A — матрица коэффициентов прямых затрат.

Рассмотрим случай, когда задано W, т. е. заданы объемы производства по всем отраслям. Тогда вектор V определяется формулой

$$V = (E - A)W,$$

где E — единичная матрица. Другой случай, когда заданным оказывается V, т. е. заданы уровни конечного продукта по всем отраслям. Вектор W определяется в этом случае формулой

$$W = (E - A)^{-1} V.$$

Если объемы производства заданы только по части отраслей, а по остальным известны уровни конечного продукта, то решение системы (2) незначительно усложняется. Если же пользоваться не коэффициентами прямых затрат (a_{ij}), а коэффициентами полных затрат (c_{ij}), то система (2) преобразуется и приводится к виду

$$(3) \qquad W_i = V_i - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} V_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Система (3) может использоваться подобно системе (2), но с ее помощью легче находятся W_i по заданным V_i.

Необходимо сказать, что формулы (2) и (3) верны только в предположении, что коэффициенты прямых затрат a_{ij} остаются неизменными при возможных изменениях объемов выпуска продукции. Конечно, эта гипотеза не очень строго соблюдается в действительности. Поэтому указанными формулами можно пользоваться как весьма приближенными и то лишь при не очень больших отклонениях объемов выпуска от базисных данных.

Несмотря на простоту и удобство в использовании, схема межотраслевого баланса имеет и существенные недостатки. Например, немалые трудности при составлении балансовых соотношений возникают из-за того, что предприятия почти каждой отрасли производят не только продукцию, относящуюся непосредственно к своей отрасли, но и другие виды продукции. Скажем, шарикоподшипниковый завод выпускает и мясорубки, и фигурные коньки, и другие предметы широкого потребления. Кроме того, нормы затрат для одного вида продукции, производимого на разных предприятиях, как правило, не одинаковы даже для предприятий одной и той же отрасли. Именно поэтому при изменении объема производства трудно ожидать, что он будет реализован с теми же (средними) затратами.

Но даже если и преодолеть эти трудности, не удается избавиться от главного недостатка схемы межотраслевого баланса. Эта схема представляет собой по сути как бы моментальную фотографию сложившегося состояния экономики: в ней никак не учитывается развитие народного хозяйства. Получаемые средние уровни затрат не отражают многообразия возможных технологий, реализации достижений технического прогресса. Естественно поэтому, что на основе межотраслевого баланса нельзя решать задачи экономической динамики — определять оптимальные темпы и пропорции развития различных отраслей народного хозяйства. На частичное устранение этих недостатков направлены некоторые народнохозяйственные динамические модели, построенные на базе межотраслевого баланса.

В качестве примера приведем динамическую модель межотраслевого баланса, позволяющую учитывать капиталовложения в различные отрасли, а также связь между общими объемами производства в различные периоды. В ней через ΔK_{ij} обозначено количество продукции i-й отрасли, затрачиваемое в данный период на капиталовложения в j-ю отрасль, а номер периода указывается индексом t. С такими обозначениями основная система уравнений межотраслевого баланса преобразуется в

$$(4)\qquad W_i^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}W_j^t + \sum_{j=1}^{n} \Delta K_{ij}^t + V_i^t, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если предположить, как это обычно делается, что необходимые для отрасли капиталовложения пропорциональны приросту продукции отрасли, т. е

$$\Delta K_{ij}^t = \nu_{ij}(W_j^t - W_j^{t-1}),$$

то уравнения (4) приводятся к виду

$$(4')\qquad W_i^t = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \nu_{ij})\, W_j^t - \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij}W_j^{t-1} + V_i^t.$$

Величины ν_{ij} носят название *коэффициентов вложений*. Эти коэффициенты позволяют выявить необходимую связь, существующую между периодами. Из системы (4′), зная общие объемы производства по всем отраслям в период $t-1$ и зная объемы потребления, можно найти объемы производства в период t.

Такого рода модели учитывают динамику развития экономической системы. И если, как отмечалось, статический межотраслевой баланс — это моментальная фотография, то динамические модели межотраслевого баланса можно считать чем-то вроде документального кинофильма. Но ни те, ни другие модели не могут полностью решить главной задачи экономической динамики — рассчитать оптимальные темпы и пропорции развития отраслей народного хозяйства. Прогресс в решении этой задачи будет, вероятно, достигнут на других путях. Мы имеем в виду, прежде всего, интенсивно разрабатываемую сейчас теорию динамических моделей оптимального планирования.

2 МОДЕЛИ СПРОСА

Значительная и довольно глубоко разработанная группа макроэкономических моделей применяется для изучения проблем спроса и потребностей населения. Эти проблемы имеют первостепенное значение для социалистической экономики, стремящейся к наиболее полному удовлетворению непрерывно растущих потребностей общества.

Следует иметь в виду, что удовлетворение потребностей происходит в настоящее время в форме удовлетворения платежеспособного спроса. Какой-то человек может, например, иметь желание (потребность) приобрести пианино, но для того, чтобы это желание осуществилось, он должен обладать платежеспособным спросом, или, говоря попросту, иметь деньги для покупки пианино (вариант с выигрышем в лотерее не рассматривается). Существуют, конечно, и другие факторы, влияющие на спрос. Например, тот же человек должен иметь место, куда поставить пианино; желательно, чтобы родственники, живущие вместе с этим человеком, не очень возражали против покупки; наконец, приобретение пианино не должно мешать покупке холодильника, который необходим этому человеку, и т. д. Все эти факторы несомненно важны, но в масштабах всего хозяйства первенствующую роль играет именно платежеспособный спрос. От него в конечном счете зависят и объем и структура производства.

Измерение платежеспособного спроса и особенно его прогнозирование представляют довольно сложную задачу. Ее невозможно решить на уровне отдельного потребителя, но на уровне общества в целом выявляются некоторые закономерности и, основываясь на них, можно построить ряд математических моделей этого экономического процесса. Самыми достоверными, вероятно, были бы модели, в которых платежеспособный спрос точно сопоставляется с разными факторами (уровнями дохода, составом семьи, ценами и др.), влияющими на его величину. Но такие модели — пока несбыточная мечта. Между спросом и этими факторами нет функциональной зависимости, что чрезвычайно затрудняет построение подобных моделей.

Обычно при моделировании спроса приходится ограничиваться построением корреляционных функций, отражающих связь (корреляцию) между его величиной и каким-нибудь одним фактором в среднем, для массы наблюдений. Методы множественной корреляции — изучение зависимости спроса от многих факторов — как правило, оказываются менее точными. На основании построенных корреляционных функций могут быть рассчитаны очень важные показатели — коэффициенты эластичности.

Коэффициент эластичности — это величина, которая показывает, на сколько процентов изменяется тот или иной показатель спроса, если причинный фактор (доход, цена и т. п.) изменится на 1%. Покажем, например, как вычисляется коэффициент эластичности потребления в зависимости от дохода.

Прежде всего следует построить корреляционную функцию, отражающую связь между потреблением и доходом. Понятно, что для различных групп продуктов эти функции могут значительно отличаться друг от друга. Так, с ростом доходов сначала происходит увеличение спроса на продукты первой необходимости (например на хлеб или мясо), однако затем наступает насыщение и последующее увеличение доходов уже не вызывает роста потребления этих продуктов. Иначе изменяется спрос на предметы длительного пользования (пианино, автомобиль и др.). Если их не хватает, возникает так называемый отложенный спрос — деньги не поступают в хозяйственный оборот, оседают у населения.

Обозначая через x и y соответственно величины дохода и потребления данного продукта на душу населения, будем считать, что по эмпирическим данным нами построена корреляционная функция $y = f(x)$. Коэффициент эластичности определяется как частное относительного приращения потребления к относительному приращению дохода, т. е.

$$E \approx \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}},$$

или в дифференциальной форме

$$E = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}.$$

Установлено, что для продуктов первой необходимости коэффициенты эластичности невелики, обычно меньше единицы, тогда как для предметов длительного пользования, и особенно для предметов роскоши, они значительно возрастают. В качестве иллюстрации приведем данные об эластичности различных видов потребления и расходов в зависимости от дохода, в основу которых положены ма-

ТАБЛИЦА 27

Виды потребления и расходов	Коэффициент эластичности потребления и расходов от дохода
Потребление картофеля	0,41
Потребление пшеничного хлеба	0,44
Потребление животного масла	0,67
Расходы на одежду, ткани, обувь	0,95
Расходы на лечение, гигиену и отдых	1,12
Расходы на общественное питание	1,28
Потребление телятины	1,40

териалы обследования 987 рабочих семей-одиночек в РСФСР, проведенного в 1960 г. (табл. 27).

Из этой таблицы сразу видно, например, что спрос на картофель удовлетворен полнее, чем на телятину и поэтому с ростом дохода спрос на телятину растет быстрее (коэффициент эластичности потребления телятины гораздо выше коэффициента эластичности потребления картофеля). Аналогичные выводы можно сделать и относительно потребления других продуктов, указанных в табл. 27. В этой таблице оказались только положительные коэффициенты эластичности, но возможны и отрицательные значения таких коэффициентов (например, с увеличением дохода на 1% потребление маргарина уменьшается).

Точно так же, как коэффициент эластичности потребления от дохода, могут быть вычислены и другие коэффициенты эластичности потребления — от цены, от размера семьи, обеспеченности рынка каким-либо продуктом и т. п. Особую роль среди них играет коэффициент эластичности спроса от цены. Он позволяет ориентироваться в экономических последствиях, связанных с изменениями розничных цен. К примеру, допустим, что имеется товар, спрос на который достаточно высок. Какие последствия вызовет изменение цены на этот товар? Если цена на него будет снижена, может произойти такое увеличение спроса, что общая сумма, полученная от продажи, будет больше, чем раньше. Однако возможно и недостаточное повышение общей суммы продаж данного товара и, значит, уменьшение дохода. Аналогичная дилемма возникает и при установлении более высокой цены на этот товар. Это мероприятие может увеличить общий доход, если товарооборот уменьшится незначительно, но возможно и такое снижение спроса, при котором общая выручка окажется меньше, чем до повышения цены. Моделирование таких процессов, в результате которого ищется правильное решение, осуществляется с помощью коэффициентов эластичности.

В качестве примера практического использования коэффициентов эластичности упомянем работу, связанную с введением нового тарифа на такси в 1961 г. Под руководством одного из авторов настоящей книги было проведено предварительное исследование ожидаемой реакции населения на предложенное изменение тарифа, основанное, в частности, на данных о работе такси до и после предыдущего понижения тарифа в 1954 г. Изучение коэффициентов эластичности (отношение процентного прироста спроса к процентному уменьшению тарифа) для поездок разной дальности позволило не только предсказать основные последствия введения нового тарифа (значительное увеличение спроса на поездки на дальние расстояния и обусловленные этим возрастание средней дальности поездки, уменьшение холостого и увеличение оплачиваемого пробега, уменьшение простоев и др), но и точные размеры этих изменений Результаты анализа работы таксомоторных парков после изменения тарифа не только подтвердили экономическую эффективность новой структуры тарифа, но и дали прекрасное совпадение реальных показателей с их прогнозными оценками.

Маневрирование розничными государственными ценами, основанное на изучении коэффициентов эластичности спроса, является важным звеном в управлении сбытом потребительских товаров и регулировании народного потребления. Нужно признать, однако, что пока такое маневрирование не осуществляется достаточно гибко. Об этом свидетельствуют сообщения в печати о больших нереализуемых запасах тех или иных товаров. Средства, затраченные на их изготовление, замораживаются, товарооборот уменьшается. В то же время спрос на другие товары не удовлетворен. Применение математико-экономических методов в оперативном регулировании цен, которое пока еще не получило достаточно широкого распространения, могло бы исправить это положение, устранить ненужные потери и тем принести немалую пользу народному хозяйству.

3 МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ

Рассмотрим модель развития экономики, разработанную английским экономистом Р. Харродом (сходные модели были предложены еще ранее советским экономистом Фельдманом). Несмотря на простоту — в модели учитывается всего только один ограниченный фактор — капитал — с ее помощью может быть проведено грубо приближенное исследование закономерностей роста экономики. В модели используются такие обозначения: $y(t)$ — национальный доход; $k(t)$ — капитал (производственные фонды), $c(t)$ — объем потребления; $s(t)$ — объем накопления; $j(t)$ — инвестиции (капиталовложения).

Предполагается, что экономика функционирует так, что выполняются соотношения

$$y(t) = c(t) + s(t)$$

(национальный доход распределяется между накоплением и потреблением);

$$s(t) = j(t)$$

(накопления равны инвестициям);

$$s(t) = \sigma y(t), \text{ где } \sigma = \text{const}$$

(накопления составляют постоянную долю национального дохода);

$$k'(t) = j(t)$$

(темп роста капитала равен инвестициям);

$$k(t) = py(t), \text{ где } p = \text{const}$$

(отношение капитала к национальному доходу — величина постоянная — наблюденный эмпирический факт).

Из уравнений, описывающих модель, сразу же следует

$$y(t) = \frac{1}{\sigma} j(t) = \frac{1}{\sigma} k'(t) = \frac{p}{\sigma} y'(t),$$

или

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\sigma}{p}.$$

Следовательно, темп роста национального дохода равен σ/p и, значит, если предположить, что в начальный момент времени (при $t = 0$) национальный доход равен y_0, то закон его изменения во времени имеет следующий вид:

$$y(t) = y_0 e^{\frac{\sigma}{p} t},$$

что зачастую неплохо согласуется с практикой.

Для описанной модели естественным образом возникают две задачи. Первая из них может быть названа задачей управления. В ней задан закон изменения национального дохода во времени в виде известной функции $\varphi(t)$ и требуется так подобрать изменение параметра σ, чтобы функция $y(t)$ в какой-то степени была близка к $\varphi(t)$ (разумеется, управление должно быть выбрано так, чтобы не нарушались сделанные выше гипотезы). Вторая задача может быть охарактеризована как определение поведения модели при выбранном управлении. В этой задаче выбран параметр управления σ в допустимых для него пределах и требуется определить закон изменения национального дохода. Результаты решения таких задач, полученные, однако, для более точных моделей, представляют не только теоретический, но и практический интерес.

Перед тем как перейти к рассмотрению другой макроэкономической модели, укажем важную экономическую проблему. Для определения эффективности капиталовложений и для расчета цен необходимо знание такого параметра экономической системы, как норма эффективности капиталовложений. Подробное описание роли этого параметра будет дано в шестой главе, а здесь важно лишь заметить, что некоторую количественную оценку норматива эффективности и качественную характеристику его зависимости от других параметров системы можно получить в результате исследования макроэкономических моделей. Вот один из возможных вариантов такой оценки.

Будем рассматривать экономическую систему, в которой производится только один продукт. Частично он используется для потребления, частично же идет на увеличение основных и оборотных средств. Обозначим через $P(t)$ количество чистой продукции (национальный доход), производимое в единицу времени. Наличные фонды в момент t составляют $K(t)$, а ресурсы труда $T(t)$. Предполагаем, что величина $P(t)$, определяющаяся значениями T и K, представляет функцию этих переменных

$$P(t) = U[K(t),\ T(t)]. \tag{5}$$

Эта функция U называется *производственной функцией*.

Здесь функция $T(t)$ считается заданной. Она определяется динамикой численности рабочих и служащих в народном хозяйстве, а по существу — демографическими данными. Функция $K(t)$, обозначающая фонды народного хозяйства в момент t, является искомой. Известно только ее начальное значение $K(0)$.

Примем две довольно естественные гипотезы. Во-первых, будем считать, что производственная функция U уже включает в себя элемент оптимальности, т. е. она строится на основе наилучшего использования имеющихся объемов фондов и труда, обеспечивающего производство максимального количества продукта в единицу времени.

Во-вторых, считаем функцию U положительно однородной Это значит, что если ресурсы труда и капитала увеличиваются в λ раз, то и продукции производится в λ раз больше, иначе говоря,

$$U[\lambda K,\ \lambda T] = \lambda U[K,\ T].$$

Относительно объема потребления $V(t)$ естественно предполагать, что он определяется параметрами системы в данный момент, т. е. представляет заданную функцию их:

$$V(t) = V[t,\ T(t),\ K(t),\ P(t)]. \tag{6}$$

Используя соотношения (5) и (6), можно описать развитие экономики — скорость приращения фондов — таким дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} = P(t) - V(t) = U[K(t),\ T(t)] - \\ - V[t, T(t),\ K(t),\ P(t)]. \end{aligned} \tag{7}$$

На первый взгляд кажется, что в уравнении (7) нет никаких параметров, по которым осуществляется оптимизация. Однако это не так. Оптимизация неявно произошла за счет принятия первой гипотезы о непрерывном оптимальном преобразовании фондов и применении производственной функции, соответствующей оптимальному выбору производственных способов. Можно сказать поэтому, что в модели осуществляется в некотором смысле дифференциальная оптимизация, т. е. в каждый момент времени мы выбираем ту стратегию, которая дает наибольший прирост фондов в этот момент, учитывая, однако, требования потребления, подлежащие удовлетворению.

Приступим теперь к определению нормы эффективности капиталовложений. Для народного хозяйства норма эффективности есть тот прирост чистой продукции, который дает в единицу времени целесообразно использованная дополнительная (предельная) единица капиталовложений. Если обозначить норму эффективности через $\eta_э$, то данное выше определение можно записать на языке математики так:

$$(8) \qquad \eta_э = \frac{\partial U(K, T)}{\partial K}.$$

Выразим величину $\eta_э$ через другие переменные и параметры модели. Сначала, однако, введем и в уравнение (7) и в равенство (8) новую неизвестную функцию — фондовооруженность S, которая представляет объем фондов, приходящийся на единицу труда

$$(9) \qquad S(t) = \frac{K(t)}{T(t)}.$$

После этого (7) и (8) приобретают вид

$$(7') \qquad S' + \frac{T'}{T} S = U(S, 1) - \frac{V}{T},$$

$$(8') \qquad \eta_э = U'_S(S; 1).$$

Кроме того, требуется ввести в рассмотрение темп роста национального дохода, т. е. величину $\frac{dP}{dt}$. Дифференцируя, получаем

$$(10) \qquad \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}[TU(S, 1)] = T'U(S, 1) + TU'_S(S, 1) S'_t.$$

Отсюда, заменяя $U'_s(S, 1)$ на $\eta_э$ на основании ($8'$) и используя равенства (10) и ($8'$), решаем уравнение ($7'$) относительно $\eta_э$

$$\eta_э = \frac{\frac{dP}{dt} - T'U(S,1)}{TS'_t} = \frac{\frac{dP}{dt} - T'U(S,1)}{TU(S,1) - T'S - V} =$$

$$(11) \qquad = \frac{\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} - \frac{T'}{T}}{1 - \frac{V}{P} - \frac{T'}{T}\frac{K}{P}}.$$

Величины, входящие в формулу (11), имеют ясный экономический смысл: в числителе — относительный темп роста народного дохода (dP/dt), темп роста трудовых ресурсов (T'/T); в знаменателе — фондоемкость (K/P), доля потребления в народном доходе (V/P).

Из формулы (11), делая различные предположения относительно производственной функции и функции потребления, можно получить более простые выражения для $\eta_э$. В частности, для производственной функции вида

$$U(K, T) = K^{\alpha}T^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

(это довольно часто используемый вид производственной функции, носящей название функции Кобба — Дугласа) норма эффективности капиталовложений выражается совсем простой формулой

$$(12) \qquad \eta_э = \alpha\frac{P}{K}.$$

Все показатели, использованные для построения формул (5)—(12), имеют реальный экономический смысл и могут быть количественно определены из статистических данных, которые содержатся в статистических справочниках ЦСУ СССР. Вот, например, какими были эти показатели в 1965 г. (табл. 28).

Норма эффективности капиталовложений, рассчитанная на основании этих данных по приведенным формулам, составляет величину порядка 22%. Если в модели учесть технический прогресс, период «созревания» фондов (лаг), физический и моральный износ действующих фондов (это

ТАБЛИЦА 28

Показатель	Обозначение	Величина
Национальный доход	P	203,4 млрд. руб.
Доля потребления в национальном доходе	$\frac{V}{P}$	0,74
Основные и оборотные фонды	K	620 млрд руб.
Фондоемкость	$\frac{K}{P}$	$\approx 3,0$
Темп роста трудовых ресурсов	$\frac{T'}{T}$	2,4%
Темп прироста национального дохода	$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$	$\approx 6,5\%$

немного усложняет модель, но не изменяет принципов ее построения), то норма эффективности понижается до 18—20%. Эта также высокая величина нормы соответствует тому положению, что народное хозяйство СССР использует свои капитальные вложения с относительно высокой эффективностью. Дальнейшее совершенствование планирования народного хозяйства СССР, опирающееся на применение математико-экономических методов, позволит еще более поднять эффективность социалистического производства.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ПРАКТИКА

В этой главе излагаются некоторые вопросы, возникающие в связи с использованием оптимального планирования в экономической практике. Прежде всего будет рассмотрена некая условная идеализированная экономика, в точности описываемая линейно-программной моделью. Знакомство с ней приведет читателя к весьма оптимистическим выводам относительно возможностей решения целого ряда сложных экономических проблем. Затем будет показано, что реальная экономика сильно отличается от линейно-программной модели, в результате чего у читателя может сложиться пессимистическая оценка возможностей оптимального планирования.

Однако в дальнейшем изложении приводятся многие важные общие выводы относительно социалистической экономики, а также возможности и опыт конкретных применений в планировании и хозяйственной практике, которые получены на основе методологии оптимального планирования, несмотря на указанные трудности. Это по замыслу авторов должно способствовать выработке не оптимистического и не пессимистического, а трезвого взгляда на оптимальное решение экономических проблем.

1. ИДЕАЛИЗИРОВАННАЯ ЭКОНОМИКА — ЛИНЕЙНО-ПРОГРАММНАЯ МОДЕЛЬ

Начнем с идеализированной экономики, для которой выполнены все гипотезы линейно-программной экономической модели. В ней заданы ресурсы и задана рациональная (в данных условиях) структура потребления. С помощью рассмотренных выше методов линейного программирования может быть найден оптимальный план этой экономической системы, в котором достигнуто полное соответствие между расходом ресурсов и их наличием, а также обеспечена взаимная увязка балансов по отдельным видам продукции и по производственным факторам. Кроме того, выпуск конечной продукции для общественного и личного потребления (включая и производство новых средств производства) соответствует заданной структуре и максимален. Причем такая взаимосогласованность в этой идеализированной экономике относится не только к плану в целом, но и к отдельным частям его: между территориальными, отраслевыми подсистемами и отдельными предприятиями существует полная согласованность в распределении средств и баланса продукции (то, что потребляется одними отраслями, в нужном объеме производится другими и т. д.). Иначе говоря, в идеализированной экономике каждый локальный комплекс представляет собой оптимальную подсистему, которая при имеющихся ресурсах (с учетом материальных потоков из других комплексов) дает максимальный выход продукции предусмотренного планом состава.

Одновременно определяется и система оценок, соответствующих этому оптимальному плану. Она охватывает все ингредиенты и ограничения плана — оценки различных категорий труда, оценки конечной и промежуточной продукции, прокатные оценки оборудования, рентные оценки природных источников и т. д. Оценки должны быть согласованы между собой и с планом, т. е. сумма оценок произведенной продукции в каждом примененном способе должна быть равна сумме оценок затраченных ресурсов. Так, полная оценка продукции предприятия совпадает с суммарной оценкой затрат, слагающейся из оценки материальных затрат, включая амортизацию оборудования, оценки использования трудовых ресурсов по видам, прокатных оценок оборудования (или предприятия в целом), а также рентных оценок природных источников, если таковые участвуют в производстве.

Наличие цен позволяет построить в денежном выражении экономические показатели работы предприятий: план реализации продукции, объем товарной продукции и т. д. При выполнении плана и нормальной работе предприятия, если в число расходов помимо материалов и оплаты труда включены плата за фонды и другие ресурсы, расходы в совокупности будут покрывать стоимость произведенной продукции и прибыль окажется нулевой. Это будет свидетельствовать о соответствии работы предприятия плану. Впрочем, может быть предусмотрено, что определенная доля платы за оборудование, платы за трудовые ресурсы, ренты остается в распоряжении предприятия в качестве прибыли и непосредственно расходуется им на расширенное воспроизводство, на общественные фонды потребления, реализуемые через предприятия, и т. д. В этом случае сам производственно-финансовый план предприятия предполагает наличие прибыли и если работа предприятия идет в соответствии с этим планом, то предусмотренный размер прибыли реализуется.

Итак, можно сказать, что в идеализированной экономике, полностью соответствующей гипотезам линейной модели (имеется полная информация о ресурсах, производственных способах, нормативах затрат и т. д.), если оптимальный план построен и сознательно выполняется, т. е. работа идет в соответствии с рациональными решениями, предусмотренными планом, трудовые ресурсы распределены наиболее рационально, а потребление реализуется в соответствии с рациональными нормами, которые предусмотрены оптимальным планом и т. д., то имеет место полная гармония. Народное хозяйство полностью сбалансировано — производство соответствует потреблению, выпуск конечной продукции определяется потребностями; ресурсы труда, природные ресурсы, оборудование использованы наилучшим образом; на предприятиях используются наиболее эффективные способы производства; все предприятия рентабельны и получают предусмотренную планом прибыль. При этом план и цены взаимно согласованы и поддерживают друг друга· то, что рационально, не только запланировано предприятию, но и оказывается для него наиболее выгодным.

Еще более широкая картина экономического благополучия и гармонии возникает при переходе к оптимальной динамической модели, описывающей с той же степенью идеализации развитие народного хозяйства. Опять предполагая, что модель обеспечена необходимой информацией, например данными о ресурсах труда, природных ресурсах за весь планируемый период, данными о производственных способах на весь период (наличие прогноза технического прогресса), а также гипотезой о структуре потребления и, возможно, темпах его роста, получаем оптимальный перспективный план развития экономики. План этот сбалансирован во времени, в нем приняты наилучшие (в исходных гипотезах) решения о темпах развития различных отраслей, о возможных технических решениях, рациональных темпах осуществления технического прогресса, смене производственных способов, очередности и темпах освоения природных ресурсов и т. д.

План сопровождается увязанной с ним динамической системой оценок, которая охватывает согласованные между собой общественные оценки продукции, труда, оборудования (прокатные оценки), ренту, норму эффективности капиталовложений и т. п. Благодаря этой системе оценок имеется возможность приведения равновременных и разнокачественных затрат и эффектов. В оптимальном плане фигурируют только такие долговременные мероприятия и вложения, которые оправданы и рентабельны, т. е. сумма эффектов, полученных в течение периода действия объекта, находится в соответствии с произведенными затратами (понятно, что такое соответствие достигается между эффектами и затратами, если они приведены к единому эквиваленту на основании динамической системы оценок).

Таким образом, в идеализированной модели при принятых гипотезах и требованиях обеспечиваются максимально достижимые темпы развития производительных сил и удовлетворения потребностей. Описанная подобным образом модель выглядит довольно простой. Создается впечатление, что изложенная система оптимального плана и его оценок даже избыточна по информации. Ведь если определены материальные потоки между предприятиями и производственные программы их заданы оптимальным планом, то нет никакой надобности устанавливать план еще и в денежном выражении. Предприятия вполне могут рассчитываться с государством и друг с другом, передавая соответствующие материальные ценности без всякой денежной оценки. «Избыточность» описанной выше системы показателей сказывается еще и в том, что она дает возможность предприятию определить оптимальную производственную программу, выбирая те изделия, которые для него рентабельны по о. о. оценкам. Но какая в этом нужда, если в идеализированной экономике оптимальный план дан и непосредственно в предметной форме?

Однако даже в идеализированной экономике о. о. оценки, выполняющие функции цен, могут найти существенные применения. Подсчитав оценки эффекта, легко установить, например, полезно ли использование нового способа технологии или организации производства, который был открыт после составления плана. По таким оценкам сравнительно просто произвести изменения в плане, необходимые для того, чтобы добиться полного соответствия плана ресурсам или нормам, если принятые при расчете плана значения их отличались от действительных. С помощью оценок измеряются отклонения результатов работы предприятий от плановых наметок и определяется достигнутая эффективность использования ресурсов. Нельзя сбросить со счетов и информационную роль оценок, позволяющую достигать известной децентрализации проектных и производственных решений.

Таким образом, даже для модели идеализированной экономики оценки оптимального плана представляют определенную ценность. И это следствие того, что модель — не условная схема, а отражение определенных реальных условий. Отсюда становится понятным, почему анализ статической и динамической линейно-программных моделей позволяет сделать ряд общих выводов о структуре цен, характеристике оптимального плана, эффективности капиталовложений, которые имеют значение даже для тех случаев, когда не полностью выполнены гипотезы, лежащие в основе этих моделей. Эти общие выводы имеют поэтому гораздо более широкую область применения.

Для того чтобы более вдумчиво подойти к вопросу о том, в какой степени могут применяться названные модели для анализа реальной экономики, надо более отчетливо выяснить, в какой мере и в чем реальная экономика соответствует схеме и гипотезам модели и в какой мере и в чем не соответствует. Именно такой анализ должен позволить установить, в какой степени и в какой форме выводы и методы линейно-программных моделей могут использоваться для анализа и расчетов реальной экономики.

2. РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ ИДЕАЛИЗИРОВАННОЙ И РЕАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКОЙ

Попробуем перечислить некоторые важные пункты, в которых реальная экономика расходится с гипотезами математической (линейно-программной) модели.

1. Неполнота исходных данных. В модели предполагается, что все производственные способы могут быть предусмотрены и описаны таблично или алгорифмическим образом. Однако в реальном процессе планирования это условие, как правило, не соблюдено. Многие из таких способов возникают в самом процессе организации производства, они учитывают вновь возникшие обстоятельства или неизвестные прежде возможности. Расхождение между моделью и реальностью в отношении полноты системы производственных способов особенно велико в динамических моделях. Что же касается полного и точного прогноза всех возможных производственных способов на планируемый период, то такой прогноз заведомо неосуществим.

Расчет модели предполагает также наличие достаточно полной и правильной информации. В частности, необходимо знание технологических коэффициентов затрат и продукции, производительности оборудования и т. д. Однако в действительности такая информация разнородна, разнокачественна, а часто вообще отсутствует. Например, относительно производительности оборудования источником информации могут служить проектные, нормативные или фактические данные, но, во-первых, все эти данные являются усредненными, а, во-вторых, между ними имеются значительные расхождения. Иначе говоря, информация, нужная для модели, в реальной хозяйственной практике часто отсутствует. Но и та информация, которая существует, страдает не только неполнотой или случайными ошибками. Нередко происходит сознательное искажение реальных данных, например, приписки или даже сокрытие сведений о резервах или о более эффективных способах организации производства, оставленных «про запас», и т. д.

Следует обратить внимание и на другое важное обстоятельство. В центральный планирующий орган и в высшие отраслевые органы управления не может поступать вся информация. Значительная часть ее остается на предприятии. Поэтому даже при самом совершенном сочетании централизованных и децентрализованных показателей система должна предполагать использование не механических, а творческих решений на местах.

2. Неоднородность ингредиентов модели. Линейно-программная модель исходит из предположения, что все ее ингредиенты однородны. Однако реальность далеко не соответствует этому предположению. Отдельные единицы продукции — руда, древесина и т. д. — разнятся по качеству; виды оборудования имеют разную производительность, используются в неодинаковых условиях; природные источники обладают различными свойствами, как естественными, так и экономическими. Еще в большей степени сказанное относится к такому ингредиенту модели, как труд. В реальной жизни производительность зависит не только от квалификации и профессии, но определяется во многом физическими данными работника, его личными качествами, настроением, местом в коллективе и т. д.

Иногда считают, что в модель допустимо вводить любое число переменных и благодаря этому можно учесть все многообразие ингредиентов. Однако такая гипотеза о потенциальной осуществимости получения и ввода любого объема информации и расчета модели любой размерности очень далека от действительности. Несмотря на эффективность методов решения (особенно линейных задач) и высокие технические характеристики современных ЭВМ, и на них затруднительно получать обозримое решение и осуществлять анализ задач с числом ограничений, превышающим несколько сотен.

Кроме того, разбивка ингредиентов на слишком детальные группы лишает возможности получения достаточно полных и устойчивых статистических и нормативных данных и делает модель необозримой. Поэтому на практике оказывается необходимым, наоборот, агрегировать ингредиенты, объединять их в укрупненные группы. А это еще более усиливает неоднородность ингредиентов и увеличивает разрыв между требованиями модели и условиями реальной хозяйственной жизни.

3. Отклонения от линейной модели. Ряд гипотез линейной модели не выполнен удовлетворительно в реальной экономике. Это в первую очередь относится к зависимости эффекта от затрат, которая в действительности носит нелинейный характер. Нелинейность присуща и многим другим экономическим зависимостям. Реально не оправдана и гипотеза безграничного дробления, т. е. допуск любых значений интенсивности. Многие фактически используемые производственные способы недробимы. Линейная модель вступает в противоречие с реальностью еще и потому, что значительное количество данных, особенно тех, которые характеризуют будущие периоды в динамических моделях, носит стохастический характер.

В частности, стохастический характер данных о производительности, качестве сырья и сроках приводит к тому, что и планы не могут быть полностью детерминированными. Поэтому планирование, опирающееся на линейно-программные модели, может быть приближено к реальности только при условии, что предусмотрен специальный механизм корректирования плана, который учитывает нарушения и отклонения, возникающие по таким причинам.

Отклонения от линейности вызывают осложнения не только в расчетах плана, но и при использовании связанных с ним оценок. В случае нелинейности эти оценки соответствуют только малым, дифференциальным, приростным изменениям переменных, значит, при расчете действия производственного способа или комплекса в целом может оказаться, что суммарные оценки продукции и затрат не совпадают друг с другом. Тогда установление цен в соответствии с о. о. оценками может привести к тому, что поступления предприятия окажутся ниже его затрат. В условиях хозяйственного расчета это означает, что нужно либо отказаться от такого формирования цен, либо, чтобы не нарушать хозрасчетных принципов, предусмотреть определенные компенсационные платежи — дотации. Аналогичные осложнения вызывают целочисленность и стохастика, существующие в реальной действительности. Так, в условиях недробимости нельзя пользоваться оценками для того, чтобы установить, целесообразно ли включение в план нового производственного способа. Эти оценки «работают» лишь при условии, что могут быть реализованы сколь угодно малые интенсивности производственных способов. Если же это условие не выполнено, вопрос о целесообразности включения нового способа в план возможно решить только путем составления нового плана.

4. Отклонения от оптимума. Полученные в линейно-программной модели выводы относительно системы экономических показателей как в целом, так и в части их структуры характеризуют хозяйство, функционирующее на основе оптимальных решений. Применение всех этих выводов поэтому возможно в полной мере лишь при условии, что оптимальный план реализован, если речь идет об анализе действующей экономики, или будет реализован, если речь идет о планировании. Между тем в реальной экономике в настоящее время это не так и, более того, полная реализация оптимальных планов даже на ближайшее будущее маловероятна. Поэтому возникает вопрос, в какой мере выводы, полученные при анализе оптимальной линейно-программной модели, могут прилагаться к фактически существующей, неоптимальной экономике. Аналогичная проблема встает и при использовании данных современной статистики. Эти данные, а также действующие нормативы описывают современное, реально функционирующее хозяйство. Но в какой мере такие статистические данные могут быть применены в модели и расчетах оптимального плана?

К отклонениям от оптимума приводят и другие факты реальной хозяйственной жизни. Так, в линейно-программной модели предполагалось, что затраты труда данной категории в данном процессе представляют собой заданную определенную величину. В действительности же эта величина зависит от многих обстоятельств. На часовую производительность труда, которая в модели принята неизменной, реальная жизнь влияет и через экономические условия (уровень оплаты труда, системы заработной платы и др.), и через социальные условия (формы быта, организация досуга и др.), и через играющие очень важную роль моральные факторы. Учесть полностью все эти влияния в модели даже путем ее чрезвычайного усложнения — задача неразрешимая. Значит, полученное решение будет отклоняться от действительного.

Еще одна группа таких отклонений порождается тем, что в линейно-программной модели все ресурсы и вся продукция реализуются в порядке планового распределения. Однако действительность намного богаче модели. Например, предметы личного потребления приобретаются в соответствии с желаниями, вкусами, материальными возможностями потребителя и, следовательно, не распределяются. Здесь нужны более тонкие формы реализации, основанные на использовании изучения и прогнозирования спроса. Конечно, существуют разнообразные пути воздействия на спрос, главным образом опирающиеся на применение экономических рычагов, но они не находят отражения в линейно-программной модели.

Прямое плановое распределение, которое представляет одно из исходных положений модели, не имеет места и в некоторых других областях экономической деятельности. Возьмем, например, распределение трудовых ресурсов. Оно в значительной мере состоит не в прямой реализации рационального распределения рабочей силы, а в выборе трудящимися мест работы в соответствии с возможностями, способностями, желаниями, интересами и предоставляемыми условиями. Следовательно, и здесь реальный механизм управления значительно сложнее, чем в модели, а это в свою очередь вызывает отклонения от нее. К последствиям такого же рода ведут непредусматриваемые моделью продажа продукции в неплановом порядке (например, на колхозном рынке) или работы по индивидуальным заказам, строительство хозяйственным способом и т. д.

Таким образом, линейно-программная модель, на основе которой находится оптимум для идеализированной экономики, не дает оптимальных решений для реальной социалистической экономики или вернее эти решения отклоняются от оптимума. Гипотеза о прямом плановом распределении всех ресурсов и всей продукции в реальном хозяйстве также не выполняется. Поэтому социалистическая экономика не может достаточно точно и вполне удовлетворительно описываться линейно-программной моделью и особенно тем ее вариантом, который предусматривает всеобщее прямое распределение и управление (материальные потоки без цен). Следовательно, цены, сопровождающие оптимальный план, отнюдь не избыточная информация, как казалось при рассмотрении модели идеализированной экономики, а являются необходимым элементом оптимального планирования, который открывает возможность сочетать методы централизованного и децентрализованного управления.

5. Зависимость эффективности организации производства от системы оценки, контроля и стимулирования. Линейно-программная модель, описывающая идеализированную экономику, допускает, что в отдельных звеньях ее решения принимаются самостоятельно, но согласованно с интересами всей системы. Действительно из оптимальной модели можно получить комплекс оценок и показателей, которые позволяют осуществить такую частичную децентрализацию решений. Но на практике реализовать этот порядок не так просто.

Для идеализированной экономики достаточно установить, какое технологическое или плановое решение, относящееся к предприятию, наиболее эффективно с точки зрения народного хозяйства, и это уже означает, как само собой разумеющееся, что именно такое решение и будет принято. В реальной экономике дело обстоит иначе. Уже говорилось о трудностях получения показателей и оценок, опирающихся на большую информацию, которая может быть недоступной, неточной и необъективной. Но даже преодолев такие трудности и уверившись в народнохозяйственной целесообразности осуществления определенного решения, нельзя поручиться, что именно это решение будет принято.

Практически оказывается, что интересы предприятия и интересы народного хозяйства в ряде моментов не совпадают. Для принятия решения на уровне предприятия основное значение имеют не столько отвлеченные соображения о народнохозяйственной эффективности, сколько конкретные последствия его — оценка деятельности предприятия, материальное и моральное стимулирование его руководителей, размеры фондов для улучшения условий производства и поощрения работников предприятия. Пока, например, оценка деятельности предприятия осуществляется на основе показателей выполнения плана по общему объему выпуска продукции (товарная продукция, объем реализации), оно нередко стремится увеличить выпуск материалоемких и дорогих изделий, не заботясь о том, выгодно ли это решение народному хозяйству.

Значение системы показателей, положенной в основу оценки и стимулирования работы предприятия, столь велико, что такая система заметно сказывается не только на отдельных хозяйственных решениях, но и на структуре всего производства. В частности, при системе показателей, которая выдвигает на первый план объем выпуска продукции, в экономическом обороте оказывается слишком много изделий, которые выгодно производить, но невыгодно приобретать, и в то же время ощущается постоянный дефицит изделий, невыгодных производителям (это поло-

жение наглядно иллюстрирует, например, нынешняя с
туация с запасными частями). Значение системы эконом
ческих показателей, таким образом, аналогично явлени
которое в физике называют «воздействие наблюдателя
наблюдаемое явление». то, какая система показател
принята, сказывается на развитии самой экономики

Казалось бы, принципиальная возможность соглас
вания интересов отдельных предприятий с интереса
системы в целом не возникает, если положить в осно
расчетов оценки оптимального плана и в качестве оценс
ного показателя деятельности предприятия принять л
кальный критерий, согласованный с общим критери
системы. Однако в силу тех отклонений реальной экон
мики от модели, о которых шла речь выше, этот оценочн
критерий может не дать нужного эффекта.

Таким образом, в реальной экономике проблема с
гласования интересов предприятия и народного хоз
ства не сводится только к получению информации о п
вильном решении и его реализации. Реальному пр
приятию недостаточно знать, какое решение правил
с точки зрения всей экономики, оно должно быть, кр
того, поставлено в такие условия, при которых вы
правильного решения будет соответствовать его инте
сам. Чтобы создать такие условия, нужно, во-перв
добиться согласования между системой планировани
системой стимулирования, во-вторых, ввести действ
ную систему регулирования и контроля, в третьих, ус
новить эффективные меры контроля и ответственнос
обеспечивающие поступление необходимой информа
и принятие на ее основе правильных решений. Осущ
вление этих мероприятий в полном объеме — дело бу
щего. Определенные возможности здесь открывает,
уже сказано, построение оценочных показателей и сти
лирования с использованием показателей оптималы
плана. Однако путь реального претворения этой и
еще во многом неясен. Сегодня же, как было показ
хозяйственная практика еще довольно сильно расход
с гипотезами линейно-программной модели.

6. Трудности выбора критерия оптимальнос
Отнюдь не простым вопросом при моделировании эк
мики является выбор критерия оптимальности. Ч
применяемая форма этого критерия — получение ма
мума нужной обществу продукции при данных ре

сах — не является единственно возможной и безусловно верной. Ведь даже сами блага и ресурсы разделены не бесспорно: например, выявившиеся возможности повышения производительности труда можно реализовать либо в виде увеличения выпуска продукции, т. е. росте благ, либо в виде уменьшения рабочего времени, т. е. сокращении ресурса. Сам максимальный набор конечной продукции может иметь разную структуру. Выпуск предметов потребления должен соответствовать вкусам потребителя, но из множества вариантов такого выпуска следует стремиться реализовать лишь такие, которые наиболее соответствуют общественным интересам. Предпочтения личные и общественные далеко не всегда совпадают, и задача их примирения не проста, тем более что и те, и другие предпочтения не так легко выявить и описать. Совсем не очевидно, как разрешить все эти вопросы за счет выбора критерия оптимальности.

Следует отметить наряду с общеметодологическими трудностями и специфические особенности в вопросе выбора критерия оптимальности для отдельных типов моделей. Так, в статической модели можно сравнительно просто описать структуру конечного продукта в части предметов потребления, но гораздо сложнее учесть средства производства, идущие на капиталовложения, поскольку они предназначены для будущих периодов и их состав определяется в зависимости от планов будущих лет. Решение последней проблемы в известной мере облегчается при переходе к динамической модели. Однако в ней выбор критерия оптимальности является сложной задачей. Здесь он должен включать оптимальные пропорции разделения национального дохода на потребление и накопление, оптимальные темпы роста производственного и личного потребления и др. Критерий оптимальности должен учитывать также состояние и потенциальные возможности экономической системы на конец планового периода.

Надо сказать, что все другие формы критерия оптимальности, например производство данной продукции с минимальными затратами труда, максимизация национального дохода и пр., либо не снимают указанных трудностей, либо заменяют их другими.

7. *План и прогноз.* Математическая модель экономики строится как плановая. Ее применение к реальному хо-

зяйству предполагает возможность рассмотрения экономики как научно-управляемой сферы человеческой деятельности. В действительности же такая гипотеза справедлива в очень ограниченных пределах.

Развитие экономики зависит от многих факторов, которые далеко не всегда могут быть заранее учтены в плане. К их числу, например, относятся новые научно-технические решения, открытие новых месторождений природных богатств, политические события, социальный прогресс, изменение вкусов, потребностей и др. Экономические решения осуществляются людьми, и их действия и индивидуальности накладывают свой отпечаток на реализацию плана. Кроме того, нельзя забывать, что экономика обладает свойством инерционности, например принятые решения об изменении отраслевых и территориальных пропорций в народном хозяйстве, технологические и другие сдвиги могут быть реализованы только в течение сравнительно длительного времени, так как они требуют новых средств производства и их освоения, подготовки кадров, а также преодоления традиций, сложившихся в производстве и организации труда.

Все эти факторы и процессы учитываются не в плане, который носит директивный характер, а являются предметом прогнозирования, носящего индикативный (рекомендательный), многовариантный и вероятностный характер. Понятно, что показатели оптимального плана не могут не сочетаться с данными прогнозирования научно-технического прогресса изменений спроса, социальных сдвигов и в какой-то мере с прогнозом развития экономики в целом. Но как обеспечить наилучшее сочетание плановых и прогнозных данных? На этот вопрос пока не найдено ответа.

Следует сказать, что линейно-программные модели и другие, более сложные модели оптимального плана не могут исчерпывающим образом описать и проанализировать социалистическую экономику. Эти модели — только одно из средств исследования хозяйственных процессов. Поэтому на практике необходимо обеспечить сочетание методов оптимального планирования с другими средствами изучения экономики — статистическим анализом, социологическими исследованиями, а также с другими типами моделей — игровыми, имитационными и другими. Поэтому и выводы относительно рационального управления общественным производством, которые будут получены на основе расчетов по моделям оптимального планирования, должны уточняться и корректироваться в соответствии с данными, полученными на основе других средств исследования.

Таким образом, идеализированная в линейно-программной модели экономика даже в тех семи пунктах, на которые мы обратили внимание в этом параграфе (а подобного рода пунктов можно было бы указать значительно больше), во многом существенно отличается от реальной хозяйственной жизни социалистического общества. Невольно возникает вопрос, насколько применимы данные и выводы, полученные на основе этой модели для народного хозяйства, какое они могут иметь практическое значение?

3 РЕАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНО-ПРОГРАММНОЙ МОДЕЛИ

На первый взгляд кажется, что ответ на вопрос, которым заканчивается предыдущий параграф, может быть только отрицательным. Слишком уж сильно реальная экономическая система отличается от идеализированной экономики, соответствующей гипотезам линейно-программной модели. Однако не следует спешить с подобным ответом. Длительный опыт математического моделирования в естественных и технических науках свидетельствует о не меньших расхождениях между реальными явлениями и описывающими их математическими моделями. И несмотря на это, использование таких моделей, даже столь простых, как Лагранжева модель движения системы материальных точек или уравнение движения идеальной жидкости, намного продвинуло вперед и естествознание, и технику. Даже когда из-за значительных отклонений модели от реального объекта и невыполнения гипотез полученные расчетные данные не имели непосредственного практического значения, само модельное, математическое описание объекта давало очень много для качественного анализа исследуемого явления, а также позволяло получить представление о некоторых количественных соотношениях, свойственных этому явлению. История науки говорит о том, что возможности моделирования возрастали по мере развития математической теории и прикладных наук и это делало эффективным ее применение ко все более широкому кругу реальных технических проблем.

Естественно предполагать, что и линейно-программные модели оптимального планирования. отражающие основные черты социалистического хозяйства, в со· четании с другими средствами могут дать многое для ка чественного и количественного исследования экономики і эффективного управления ею. Это подтверждает уже имеющийся опыт построения оптимальных моделей на родного хозяйства как в целом, так и отдельных частей его (отраслей, предприятий и др.), которые оказалосі возможным обеспечить необходимой информацией, про извести расчеты и получить достаточно эффективные прак тические выводы. О ряде таких вопросов уже шла речі выше; о них будет идти речь еще в следующем параграфе Свидетельством целесообразности применения моделеі является и то, что ряд качественных выводов, полученны: при анализе линейно-программной модели идеализирован ной экономики, позволил дать практические предположе ния, оказавшиеся в согласии с рекомендациями, получен ными на основании опыта хозяйственной практики В результате они нашли частичную реализацию при про ведении хозяйственной реформы. Таким образом, следуе считать вполне реальной возможность пользоваться опти мальной моделью для качественного, структурного опи сания экономики и для приближенного построения е планов и показателей.

Если в связи с этим вернуться к произведенному ана лизу расхождений модели и реальной экономики, то хот пессимистический вывод относительно практической непрі менимости модели является, как сказано, необоснованным этот анализ не следует игнорировать, так как он позволя ет высказать ряд ценных методологических положени относительно порядка и возможностей практического и пользования оптимальных моделей.

Именно этот анализ говорит об известной ограниче ности, условности и приближенном характере выводо полученных на основе линейно-программных моделеі о необходимости не формального, а творческого подхо при их применении, тщательного анализа данных и резул татов и корректировки их в соответствии с неучтенным условиями и обстоятельствами; позволяет предостере от догматического, некритического восприятия результатов и выводов модельного анализа, абсолютизации их, от переоценки этого метода, игнорирования других средств экономического и статистического анализа, экономической практики, говорит о необходимости сочетания всех средств; позволяет предвидеть и понять, что процесс вооружения экономики и планирования новыми средствами — математическими моделями и ЭВМ представляет не единовременную триумфальную операцию, а длительный и многотрудный путь преодоления многих научных проблем и проблем экономической практики.

Уже в настоящее время модели оптимального планирования являются весьма эффективным средством экономического анализа. Рассмотрим несколько коренных проблем хозяйственного развития, в отношении которых оптимальные модели позволяют получить нетривиальные и достаточно ценные экономические выводы.

Первая из этих проблем — *норма эффективности капитальных вложений.* В настоящее время в экономических расчетах широко используется положение, что каждая единица продукции, реализуемая обществом в качестве капиталовложения, должна обеспечивать через некоторое время определенный прирост национального дохода. Годовая норма этого прироста называется нормой эффективности капитальных вложений. До конца 50-х годов существование такой нормы в социалистическом хозяйстве большинством экономистов отрицалось, поскольку она, как утверждали, аналогична норме прибыли (проценту) на капитал, т. е. является категорией капиталистической экономики. Но эта аналогия чисто формальна, она основывается лишь на внешнем сходстве двух социально различных категорий. В действительности норма эффективности никак не связана с частной собственностью на средства производства, она реализуется не в форме нетрудового дохода на капитал, а через прирост национального дохода в социалистическом хозяйстве.

Этот принципиальный вывод, который занимает ныне весьма важное место в экономической теории социализма, получает убедительное научное обоснование и конкретизацию в экономической линейно-программной модели оптимального планирования. Эта модель приводит к выводу, что для всех продуктов существует динамическая система изменяющихся во времени оценок. В этой системе единица одного и того же продукта имеет, как правило, более высокую оценку в предыдущий период и более низкую — в последующий. Это «обесценивание» продуктов отражает экономическое действие фактора времени — чем раньше продукция пущена в хозяйственный оборот, тем она ценнее для общества.

Указанное свойство модели проясняет экономический смысл норматива эффективности капитальных вложений. За счет этих вложений создаются производственные фонды, использование которых обеспечивает прирост продукции. И общество вправе требовать, чтобы процент этого прироста по отношению к вложениям был не меньше определенной реально достижимой величины — норматива эффективности. Однако чем определяется величина такого норматива? Некоторые связывают эффективность с темпом роста национального дохода или с темпом роста производительности труда и предлагают устанавливать размер соответствующего норматива исходя из того, каков этот темп. Другие считают, что норматив эффективности является не народнохозяйственным, а отраслевым критерием и зависит от потребности той или иной отрасли в капитальных вложениях.

Анализ динамической модели оптимального планирования дает ясное представление о действительном экономическом смысле норматива эффективности. Он показывает, что эффективность выражает ежегодное приращение продукта, которое получает народное хозяйство за счет дополнительной единицы продукта, направляемой на накопление — капиталовложения, и, следовательно, ее норматив характеризует эффективность свободных, еще не реализованных капиталовложений. А раз речь идет о свободных капиталовложениях, не связанных с какой-либо отраслью, то, значит, норматив их эффективности носит не отраслевой, а народнохозяйственный характер и размер его не связан непосредственно ни с темпом роста народного хозяйства, ни с темпом роста национального дохода, ни с темпом роста производительности труда. Модельные же расчеты показывают, что эти темпы могут быть в два-три раза ниже, чем норматив эффективности капиталовложений (см. гл. V, § 3).

Анализ модели приводит и к более широким выводам относительно этого норматива. Выясняется, например, что он может использоваться для приведения разновременных затрат труда к одному временнóму периоду. Так, с учетом нормы эффективности могут учитываться затраты будущих лет, скажем, расходы на реновацию, на новое строительство. Применение такой нормы позволит здесь учесть, какие потери связаны с удлинением сроков строительства. А это имеет большое практическое значение.

Например, расчеты с учетом фактора времени, проведенные на основе норматива эффективности, показывают, что удлинение срока строительства с 3 до 6 лет повышает фактическую себестоимость объекта на 30—40%. Это делает ясным путь улучшения деятельности строительных организаций. В самом деле, представим, что при подсчете стоимости строительства сроки затрат и сами затраты будут учитываться не по фактической величине, а предстанут как результат приведения их к моменту окончания строительства. Тогда строительные организации окажутся заинтересованными в сокращении сроков строительства и концентрации сил, так как только при этом условии они смогут уложиться в сметную стоимость. Это привело бы к резкому сокращению сроков строительства, и помимо сокращения затрат, к обеспечению более современного технического уровня новых предприятий.

Особенно важен правильный учет фактора времени, который обеспечивается нормой эффективности при экономической оценке научно-технических разработок. Здесь увеличение ассигнований и форсирование сроков исследований многократно окупается ускорением реализации и распространения нового изделия или процесса в народном хозяйстве. Но для того, чтобы выявить эту высокую окупаемость научно-технических достижений, необходимо правильно учесть экономическое значение фактора времени. А это осуществляется на основе динамической модели оптимального планирования.

Анализ модели позволяет прийти и к некоторым методологическим выводам. Так, становится очевидной определенная условность и приближенность положения о едином нормативе эффективности, а в связи с этим и необходимость внесения ряда поправок в расчеты эффективности. Единый норматив характеризует среднее падение динамических оценок в единицу времени. Оценки же отдельных продуктов и ресурсов имеют разные темпы падения. Известно, например, что ресурсы труда возрастают медленнее фондов и в связи с этим динамическая оценка трудовых ресурсов имеет меньший темп снижения, чем оценка фондов. По-разному изменяются оценки, связанные с продукцией добывающей и обрабатывающей промышленности. Оценки природных ресурсов, как правило, снижаются значительно медленнее оценок машин, приборов, оборудования. Причем падение последней группы оценок особенно ускоряется в связи с тем, что при массовом производстве таких продуктов имеет место нелинейное снижение затрат с увеличением объема выпуска. Имеет значение и различие темпов морального износа для разных видов продукции. Все это приводит к выводу, что единый норматив эффективности капитальных вложений, вполне соответствующий требованиям экономики как общий принцип, должен применяться в конкретных расчетах эффективности капиталовложений с определенными коррективами и уточнениями, в частности при приведении разновременных затрат и результатов.

Модель оптимального планирования показывает также другие пути применения норматива эффективности. Выше уже отмечалось, что если установлен определенный размер норматива эффективности, то это дает основание ожидать такой же величины отдачи от всех свободных капиталовложений (при рациональной их реализации). Этот вывод может быть интерпретирован следующим образом: для средств производства (фондов), полученных с затратами капиталовложений в размере K, следует считать нормальным размер прокатной оценки, равной nK, где n — норматив эффективности. Конечно, указанное применение этого принципа справедливо в полной мере лишь по отношению к капиталовложениям, которые были реализованы сравнительно недавно, хотя и здесь возможны отклонения в ту или другую сторону. Однако сам факт наличия тесной связи между прокатной оценкой и нормативом эффективности капитальных вложений открывает широкие возможности для дальнейшего исследования экономики и полезных практических выводов.

Вторая крупная экономическая проблема, которая может быть с пользой рассмотрена на основе анализа линейно-программной модели оптимального планирования, это *проблема хозяйственного расчета*. Как уже отмечалось, идеализированная экономика, отвечающая гипотезам такой модели, предусматривает для каждого пре приятия наличие плана, составленного в натуральных показателях, и выполнение этого плана по всем позициям — свидетельство нормального хода производства. Поэтому в модели контроль над деятельностью предприятия вполне исчерпывается наблюдением за выполнением плановых заданий.

Но в реальной экономике, такой детализированный, строго детерминированный, заранее предусматривающий весь ход производства и реализации план не может быть ни составлен, ни выполнен. Да социалистическое хозяйство и не нуждается в подобном плане. Планомерное, сознательное управление экономикой возможно лишь в том случае, когда имеется известная свобода для принятия решений. Поэтому реальный план предполагает допустимость и неизбежность известных отклонений как в составе продукции, так и в затратах на ее производство. В этих условиях контроль над деятельностью предприятия не может быть функцией плана, а должен осуществляться с помощью специального экономического механизма.

Такой механизм, позволяющий обществу сопоставлять, что оно дает предприятиям и что получает от них, контролируя таким путем их деятельность, называется хозяйственным расчетом. Хозрасчет выступает как стоимостная форма, выражающая требование безубыточной работы предприятия, требование покрытия расходов предприятия из его доходов. Хозяйственный расчет осуществляется таким путем: предприятие расплачивается по установленным ценам с поставщиками и выплачивает заработную плату своим работникам из тех средств, которые получены им за свою продукцию. Может создаться впечатление, будто хозрасчет полностью замыкается на экономике предприятия и не задевает экономических процессов, которые происходят на общегосударственном уровне. Такое представление ошибочно, так как предприятие использует средства производства — машины, землю, воду,— являющиеся собственностью всего общества, и определенную часть своих доходов передает государству. Однако именно это ошибочное представление господствовало в экономической теории и практике до хозяйственной реформы, начавшейся в середине 60-х годов. Многие элементы экономики, используемые в деятельности предприятий, но принадлежащие государству, не включались в сферу хозрасчетных отношений. Например, основные фонды предоставлялись предприятиям бесплатно; предприятия без всякого возмещения пользовались землей, полезными ископаемыми, лесными и водными ресурсами.

Между тем уже в то время анализ моделей оптимального планирования логически приводил к выводу, что планы предприятий должны учитывать данные об использовании ресурсов, принадлежащих государству, и это использование должно получать определенную общественную оценку. В применении к реальной экономике это означало, что такие ресурсы следует включить в отношения хозяйственного расчета. Преобразования практики планирования и экономического стимулирования, проведенные в СССР новой хозяйственной реформой, идут по пути, который в большой мере соответствует выводам модели оптимального планирования: введена плата за производственные фонды, находят применение рентные платежи (иногда в форме расчетных сдаточных цен) и др. Это дает основание предположить, что и другие выводы из анализа линейно-программных моделей оптимального плана должны найти отражение в развитии хозяйственного расчета.

В оптимальной модели помимо платы за фонды, которая определяется размером прокатной оценки оборудования, и рентных платежей, фигурируют платежи за труд в соответствии с его производственной оценкой (поскольку в реальной экономике существует заработная плата, такие платежи выступают там в форме соответствующих доплат, если оценка выше зарплаты). Установление этих экономических параметров модели, а также соблюдение требования, согласно которому цены на продукцию, произведенную предприятием, совпадают с оценками ее, означает, что в модели затраты и поступления равны друг другу. Прибыль, следовательно, возможна здесь в случаях, когда выпущено больше продукции, чем было предусмотрено планом, или затраты оказались меньше, чем требовали нормативы.

Анализ оптимальной модели позволяет наметить пути совершенствования практики хозяйственного расчета. Прежде всего это касается платы за фонды. Сейчас она рассчитывается в виде определенного процента от балансовой стоимости основных фондов. Но такой порядок экономически оправдан (да и то в качестве грубого приближения) только по отношению к новым, недавно введенным фондам. Чтобы отвечать своему назначению, плата за фонды должна устанавливаться в соответствии с прокатной оценкой, которая характеризует их потенциальную экономическую эффективность в данных условиях. Другое направление совершенствования хозрасчета — широкое распространение рентных платежей, ставящее коллективы предприятий в одинаковые экономические условия и позволяющее учитывать только те их достижения, которые связаны с их собственной деятельностью, а не с лучшими природными, территориальными и другими условиями. Это значит, что уже действующая система рентных платежей должна быть расширена, а сами платежи следует исчислять более систематически и более точно, исходя из требований оптимального использования соответствующих ресурсов.

Особенно важное значение для дальнейшего развития хозрасчетных отношений имеет принцип оценки труда по его действительной эффективности. Здесь дело не только в том, что существующие системы зарплаты недостаточно учитывают качественные различия в труде отдельных работников. (Это хотя и существенный вопрос, но он может быть частично решен улучшением действующих премиальных систем.) Более важно, что сегодня общество оказывается не в состоянии экономически управлять предприятиями в такой важной области производства, как распределение трудовых ресурсов. Преодолению этого ненормального положения должно способствовать введение платежей за труд, которые предприятия вносили бы в специальный государственный фонд. Такие платежи следовало бы установить в первую очередь по дефицитным категориям труда, например, дефицитным специальностям или дефицитным половозрастным группам, а также по районам, страдающим недостатком трудовых ресурсов. Наоборот, для избыточных по труду районов могла бы предусматриваться дотация.

В отличие от капитализма получение прибыли, дохода у нас является не самоцелью, а лишь средством повышения эффективности хозяйства. Конечной целью и решающим критерием является народнохозяйственный эффект, интересы всего общества. Между тем эффект не полностью отражается в хозрасчете и прибыли. Например, строительство и эксплуатация шоссейной дороги связаны только с расходами и не служат непосредственным видимым источником дохода, хотя, конечно, произведенные затраты перекрываются с лихвой эффектом в других отраслях. Так же производство новых видов продукции нередко на первых порах бывает убыточным. Поэтому для правильной оценки народнохозяйственных интересов и создания благоприятных условий для технического прогресса должны быть разработаны и внедрены в практику методы измерения полного народнохозяйственного эффекта. Должна быть также введена корректировка хозрасчета, с учетом этого эффекта, например, установление в отдельных случаях компенсирующих дотаций, снижение плат, с тем чтобы решения и мероприятия, эффективные для народного хозяйства, были бы выгодны и предприятию.

При установлении всех платежей в соответствии с общественными оценками используемых ресурсов и определении цен на продукцию согласно оптимальным оценкам доходы предприятий уравновесятся с его расходами — так, во всяком случае, следует из модели. Однако представляется целесообразным, чтобы некоторые средства, направляемые на развитие производства и на нужды трудящихся, оставались в распоряжении предприятия. Поэтому реформой предусматривается, что предприятие часть доходов использует для создания фондов материального стимулирования его работников, улучшения их социально-бытовых условий и совершенствования производства на данном предприятии. Такие средства у предприятия появляются благодаря тому, что государство изымает платежи за фонды и другие ресурсы не в полной сумме общественных оценок этих ресурсов, а оставляет некоторую долю в распоряжении предприятия. Вопрос о размере такой доли должен быть обсужден особо.

Для того чтобы хозяйственный расчет успешно выполня[л] свои функции контролера экономической деятельност[и] в системе социалистического производства, необходим[о] чтобы у нас действовали правильные цены. Важно д[о]биться такого положения, чтобы цена играла существе[н]ную роль в отношениях между предприятиями, чтоб[ы] было поднято значение рубля. Сейчас же, напр[и]мер, в высоких ценах нередко заинтересован [н]е только поставщик, но, как это ни парадоксально, потребитель.

Проблемы цен весьма сложны и многообразны. Их по[л]ное изложение завело бы нас слишком далеко Мы остан[о]вимся в основном лишь на *роли оптовых цен и их структ[уры]* *ре*. Это еще одна важная область, в которой анализ линейно-программной модели может существенно прояснить рассматриваемый вопрос.

Осуществляя какое-либо техническое или производственное решение, для оценки его целесообразности необходимо сопоставить то, что тратится, с тем, что получается. Иначе говоря, надо соизмерять затраты и результаты. В современном высокоразвитом хозяйстве, использующем продукцию различных, часто далеких друг от друга отраслей экономики, непосредственное сопоставление всех производственных ингредиентов в натуре неосуществимо, немыслимо. Сопоставление затрат с результатами оказывается возможным только после того, как все они приводятся к одному эквиваленту. Этот эквивалент — общественно необходимый труд, который равно определяет как все виды затрат, так и все виды результатов. Общественно необходимый труд — основа цен, а отсюда их первая функция, состоит в соизмерении всех производственных ингредиентов по единому эквиваленту. Следует сказать, что цены играют не только информационную роль, но являются и параметрами управления, служат базой экономических расчетов и решений. Поэтому, от того, насколько правильно построены цены, зависит качество всех экономических расчетов.

Еще одна важная функция цен заключается в том, что они используются как средство агрегирования. Потребность в агрегировании часто возникает в экономических расчетах. Например, в тех случаях, когда нужно охарактеризовать объем выпуска обувного или металлообрабатывающего предприятия, суммарная цена (или, как не вполне точно говорят, стоимость) этого выпуска является экономически более точным агрегатом, нежели общее количество пар обуви либо тоннаж металлоизделий. Кроме того, агрегирование с помощью цен позволяет сопоставлять друг с другом продукты, которые в натуре не имеют между собой ничего общего (например, пушки и масло). Эти функции цен и нужда в них для такого использования, по-видимому, сохранятся и в условиях коммунистического общества.

В социалистическом производстве на базе цен строится также хозяйственный расчет, разрабатываются показатели работы предприятий, осуществляются балансовые и другие сопоставления. Поэтому ценообразование представляет собой одну из ключевых проблем плановой экономики, а правильность цен служит одной из предпосылок принятия правильных хозяйственных решений. Но как установить правильную цену? Для выяснения этого вопроса обратимся к линейно-программной модели.

Анализ этой модели показывает, что получаемые в ней оценки характеризуют возможность и дают эквивалент замены одного вида продукции (или ресурса) на другой. Если за единицу измерения взят первичный фактор — труд, оценка продукции будет выражать ту величину затрат труда, с помощью которой в данной экономической системе может быть дополнительно получена единица данного продукта. Такая величина затрат в известном смысле является необходимой и достаточной, она означает, что при оптимальном состоянии системы нельзя произвести единицу данного продукта с меньшими затратами, а с затратами труда, соответствующими оценке данного продукта, при их рациональном использовании возможно получить дополнительную единицу его.

Таким образом, анализ оптимальной модели приводит к выводу, что в социалистическом хозяйстве оценка продукции должна определяться общественно необходимыми затратами труда. Этот вывод очень важен, так как он избавляет экономическую науку от получившего распространение, но совершенно неправильного представления о противоречиях между концепцией оптимального планирования и теорией трудовой стоимости К. Маркса. На самом деле таких противоречий не существует: и цены и оценки имеют в своей основе общественно необходимые затраты труда; обе категории отражают одни и те же явления, но подходят к ним с разных сторон. Подход с точки зрения линейно-программной модели оптимального планирования к учету общественно необходимых затрат труда может быть использован для детального количественного анализа.

Социалистическое хозяйство — единая система и поэтому оно должно учитывать не столько частные затраты труда на отдельных своих участках, сколько полные итоговые затраты в целом. В оценках продуктов и отражаются не непосредственные расходы, которые потребовались для производства данного продукта, а народнохозяйственные затраты, учитывающие взаимосвязь и взаимообусловленность ресурсов и продукции в современной экономике. Таким образом, первая особенность оценок оптимальной модели, связанная с тем, что они учитывают общественно необходимые затраты,— это их народнохозяйственный характер.

Вторая особенность этих оценок состоит в том, что они учитывают не средние затраты на весь выпуск, а лишь затраты на прирост продукции, на ее дополнительный выпуск, и это экономически вполне резонно, поскольку при сопоставлении двух вариантов экономических решений нам нужно сопоставление затрат на те изменения прироста в балансах продуктов, которые отличают эти два варианта. Собственно, здесь мы встречаемся со своеобразной интерпретацией известного положения Маркса о необходимости рассчитывать не все ранее произведенные затраты, а только те затраты, которых требует воспроизводство продукта. (Следует напомнить, что, говоря об учете приростных затрат, мы имеем в виду не только непосредственный расход живого и овеществленного труда, но и косвенные виды расходов, измеряемые прокатной оценкой, рентой и др.; в таком случае, если прирост продукта может достигаться и несколькими способами, затраты оказываются, как правило, равными между собой.)

Знакомство с особенностями оценок позволяет подойти к решению вопроса о том, как использовать представление, возникающее при анализе модели, в задаче действительного исчисления цен. В параграфе о расхождениях между реальной и идеализированной экономиками отмечалось, что в хозяйственной практике, поскольку она не является оптимальной, используются не только оптимальные производственные способы А результаты расчета цен оказываются различными в зависимости от того, на каком способе они будут базироваться. На первый взгляд проблема кажется неразрешимой. Но нельзя не учитывать того, что хотя действующая экономика еще неоптимальна, она все же в известной степени рациональна. Можно предполагать поэтому, что расчет цен на основе существующих производственных способов не вызовет значительных расхождений между оптимальными и фактическими значениями цены. Эти расхождения значительно уменьшатся, если в расчеты цен будут включаться не только непосредственные, но и косвенные затраты. Для сближения исчисленных цен с оптимальными, повидимому, целесообразно брать за основу полные затраты в лучших из тех реальных способов, по которым может быть значительно увеличен выпуск продукции, т. е. исчислять затраты на получение дополнительной продукции, воспроизводственные затраты.

Имеется еще одна существенная трудность при переходе от оценок модели к действительным ценам. Оценки всех видов продукции и других ингредиентов, скажем ресурсов, являются взаимозависимыми, определяются друг через друга. Оказывается, что для того, чтобы найти оценки одного вида продукции (или ресурса), нужно знать оценки всех других видов. Преодолеть такую трудность можно только организацией рационального способа (порядка) расчетов. Об одном из этих способов — методе замыкающих затрат — говорилось выше (гл. 1, § 3) При таком методе цена, например, руды определяется в соответствии с затратами, которые необходимы для ее добычи на том месторождении, которое вовлечено в хозяйственный оборот и где запасы руды практически неограниченны. Для руд, получаемых с других месторождений с более низкими затратами, устанавливается рентный платеж, который уравнивает их цены с ценой руды, добытой из первого месторождения. В результате все ингредиенты модели выстраиваются в последовательный ряд и это позволяет систематически определять их оценки.

Для приближенного расчета цен, а также для экономического анализа особенно важно то понимание структуры цены, которое дает математическая модель. Будем исходить из того, уже упоминавшегося выше положения, что оценка единицы продукции слагается из всех видов затрат в способе, использованном в оптимальном плане. Иначе говоря, цену можно записать в следующем виде:

$$Ц = М_у + Т_у + Ф_у + Р_у,$$

т. е. представить ее как сумму оценки материальных затрат — М, оценки труда — Т, прокатной оценки использованного оборудования — Ф, ренты природных источников — Р; все оценки являются удельными величинами (берутся в расчете на единицу продукции) — y

Подобное описание структуры цены позволяет выработать некоторый подход к ее приближенному расчету. Относительно материалов можно считать, что они учитываются в формуле по установленным ценам, оценку труда при достаточно грубом допущении, что его оплата соответствует его эффективности, можно принять пропорциональной или просто равной его оплате (последнее означает определенный выбор масштаба цен). Прокатная оценка оборудования принимается пропорциональной его балансовой стоимости с коэффициентом, равным нормативу эффективности (см. выше). В результате приведенная выше формула цены преобразуется в пригодную для приближенных расчетов схему

$$Ц = С_у + nK_у + Р_у,$$

где $М_у$ и $Т_у$ из прежней формулы дают $С_у$ — текущие затраты или удельную себестоимость единицы продукции; n — норматив эффективности; $K_у$ — удельная фондоемкость и $Р_у$ — рентная компонента. Если в производстве продукции природные источники не играют существенной роли, последнее слагаемое отсутствует.

В соответствии с такой схемой цена, как легко заметить, определяется формулой приведенных затрат. Таким образом, формула приведенных затрат, внешне аналогичная цене производства, которая широко использовалась при экономических оценках в проектных расчетах, оказывается также следствием и частным применением структуры цены в оптимальной модели. Этот вывод об известной применимости формулы приведенных затрат в условиях социалистического хозяйства чрезвычайно важен, несмотря на приближенность этой формулы и необходимость многочисленных коррективов и оговорок при ее использовании.

Отметим еще некоторые полезные выводы, которые дает анализ структуры цены в модели. Известно, что источник формирования затрат и нормативов — статистические данные реального производства. Однако то, что оценка и цена должны определяться не фактическими, а общественно необходимыми затратами, заставляет с большой осторожностью использовать эти статистические данные. Это важно, в частности, в условиях, когда имеются данные о себестоимости по нескольким предприятиям, которые нередко оказываются противоречивыми. В таких случаях отчетливое понимание структуры цены позволяет часто примирить их и обоснованно определить цену либо в результате правильного выбора прокатных оценок или рент, либо путем отбрасывания некоторых данных и отбора той их части, которая находится в наибольшем соответствии с природой общественно необходимых затрат.

Нужно сказать, что практика новой системы планирования и экономического стимулирования, которая начала осуществляться в СССР в середине 60-х годов, в области ценообразования во многом идет в соответствии с теми направлениями, которые следуют из анализа линейно-программной модели. Так, при проведенном в 1967 г пересмотре оптовых цен на промышленную продукцик основывались не только на себестоимости (как это был(прежде), но исходили также из величины основных про изводственных фондов. Однако практическая реализаци: этого принципа происходила в довольно упрощенно: форме: фондовая компонента цены принималась обычн пропорциональной себестоимости с единым для данно: отрасли коэффициентом, зависящим от соотношения меж д балансовой стоимостью производственных фондов и вало вой продукции этой отрасли. Иначе говоря, в действую щих ценах учитывается, как правило, среднеотраслева: фондоемкость, а не те фонды, которые действительно свя заны с производством данного изделия.

Еще одно упрощение (мы о нем уже упоминали выше состоит в том, что вместо оценки экономической эффек тивности фондов, измеренной прокатной оценкой, в дей ствующую цену входит балансовая стоимость фондо: Это упрощение, конечно, огрубляет действительные эк(номические зависимости, но в реальной хозяйственной практике очень сложно реализовать теоретически без: пречные определения. Даже измерение себестоимост: которая является более простой категорией, и то вызыва(немалые затруднения. Ведь на предприятии производи ся, как правило, не одно, а множество разных издели и в калькуляциях этих изделий имеются так называем: котловые статьи (общецеховые, общезаводские расход амортизация и др.), фактические затраты по которым данное изделие неизвестны и потому они распределяют условно, например, пропорционально затратам рабоче времени Но если существуют затруднения с распреде лением текущих затрат (определяющих себестоимост то, что говорить о тех сложностях, которые возника при распределении фондовых затрат[1]?

Сегодняшняя хозяйственная практика не облада ни методами исчисления фондоемкости конкретных из, лий, ни способами расчета прокатных оценок и соответственно возможностью дифференцированного учета фондовых составляющих. (Отчасти это связано, по-видимому, с тем, что себестоимость продукции изучается экономистами уже многие десятилетия, а вопрос об учете фондов в цене поставлен лишь недавно). Некоторые практические возможности для исчисления прокатных оценок и уточнения цен открывает получающее все большее распространение построение оптимальных планов развития отрасли и т. п.

Несмотря на то что структура применяемых ныне цен довольно сильно отличается от той, пока еще теоретической их структуры, которая вытекает из анализа оптимальной модели, результаты модельного анализа могут использоваться как в качестве ориентира при поисках правильных методов и путей построения цен, так и при уточнении ценовых расчетов. Такое уточнение, например, является очень нужным для того, чтобы учесть в цене дефицитность продукции. Как правило, если какие-то производственные мощности недостаточны, продукция, выпускаемая на них, дефицитна.

Некоторое ослабление последствий дефицита достигается повышением цен, которое ограничивает спрос (в понятиях теории оптимального планирования, повышение в том смысле, например, что устанавливается оценка более высокая, чем та, которая исчислена на основе учета фондоемкости по общему нормативу). Такая завышенная цена (оценка), хотя и является временной мерой, довольно существенно сказывается на эффективности производства этой продукции. Важно подчеркнуть эффективность подобной меры именно для производителей, а не для потребителей дефицитной продукции. У потребителя эта продукция составляет небольшую долю его затрат и если она эффективна для него, то он будет приобретать ее невзирая на переплату; производитель же получает существенный прирост дохода от выпуска этих изделий и будет заинтересован в увеличении ее выпуска. Наилучшее соотношение между степенью дефицитности изделия и его ценой на каждый период может достигаться на основе анализа оптимальной модели. Она дает ориентиры, которые даже при отсутствии точных расчетов, а только с помощью приближенных исчислений или экспертных оценок позволяют обеспечивать более полное соответствие реальных цен их научно обоснованным значениям и тем добиваться лучшего выполнения ценами их функций.

Рассмотрим еще одну особенность модели, которая представляет практическую ценность. То, что оценки устанавливаются на основе приростных (дифференциальных) затрат, а не по средним затратам, как действующие цены, имеет не только теоретическое значение.

С точки зрения народного хозяйства может в ряде случаев оказаться полезным, чтобы в отдельных отраслях действующие цены базировались на дифференциальных затратах. Это, правда, внесет некоторые нарушения в единообразный порядок ценообразования и хозрасчет, но их оправдывает эффект, получаемый народным хозяйством.

Высказанное положение имеет значение прежде всего для установления тарифов (цен) перевозок на железнодорожном транспорте. Здесь приростные текущие и фондовые затраты могут быть в несколько раз ниже средних затрат. Это связано с тем, что на железных дорогах существуют два вида затрат — зависимые (топливо, износ подвижного состава и т. д.) и независимые (например, содержание путей) от размеров движения, причем доля первого вида затрат того же порядка, что и доля затрат второго вида. Поэтому тарифы, в настоящее время исчисленные на базе средних затрат, сильно завышены. Перевод расчета железнодорожных тарифов на базу дифференциальных затрат понизил бы их величину и позволил бы приблизить размер тарифов к реальным народнохозяйственным издержкам. А это в свою очередь способствовало бы концентрации производства, широкому использованию наиболее эффективных природных богатств, лучшей специализации и проведению ряда прогрессивных экономических мероприятий, повышающих эффективность общественного производства.

Еще большее значение имеет учет дифференциальных затрат при установлении цен на продукцию машиностроения и приборостроения, особенно серийного. Здесь нередко затраты на дополнительный экземпляр серии оказываются вдвое ниже средних затрат. Учет этого положения привел бы к сильному снижению цен на оборудование и, вероятно, к значительному увеличению его выпуска. В результате сократились бы сроки замены старого оборудования на более эффективное, экономически правильнее распределялись бы капитальные вложение между оборудованием и строительством, сократился бы объем работ по ремонту оборудования, более обоснованно решались бы вопросы, связанные с экономическим расчетом эффекта технического прогресса в целом.

Рассмотрение проблемы цен с позиций линейно-программной модели позволяет ответить еще на один, чрезвычайно важный вопрос: что является решающим в ценообразовании — производство или потребление, производственные затраты или потребительные качества товаров?

С одной стороны, анализ модели приводит к выводу, что цена выражается через оценки ингредиентов, затрачиваемых при производстве данного продукта, т. е. определяется исходя из производственного способа, используемого в оптимальном плане. При этом подходе кажется, что для цены имеют значение только производственные способы, условия производства. Однако к ответу на вопрос можно подойти и с другой стороны. Например, выше уже указывалось, что при увеличении потребности в данном продукте оценка обычно растет, а это означает, что на цену влияет рост потребности. О том же говорит и другое положение — согласно модели, если данный продукт получается систематически в излишке, то его оценка может оказаться нулевой.

Анализ модели оптимального планирования позволяет заключить, что проблема ценообразования имеет две стороны. Но этот вывод не представляется неожиданным. Ведь даже здравый смысл подсказывает, что если на товар *А* затрачено больше труда, чем на товар *Б*, то цена *А* должна быть выше цены *Б*; но если *А* — это тонна низкокалорийного угля, а *Б* — тонна высококалорийного угля, то цена *А* должна быть ниже цены *Б*. Как же должны сочетаться в цене обе эти стороны, как они согласуются друг с другом? Это вопросы, на которые должна отвечать экономическая наука.

Анализ линейно-программной модели показывает, что между этими факторами, определяющими цену, нет противоречия и в процессе ценообразования должны учитываться и условия производства, и условия потребления, и затраты, и потребительные свойства. Действительно, если составляется оптимальный или хотя бы рациональный план экономической системы, то он должен включать как использование производственных ресурсов, так и удовлетворение потребностей общества и его членов; в нем учитываются и производственные возможности, и свойств продуктов, скажем, заменяемость одних продуктов другими, их эффективность и т. д. Естественно, что цены такого плана определяются и условиями производства и условиями потребления. Точнее, оценки, получаемые при решении двойственной задачи, определяются из системы соотношений, связывающих и ресурсы и продукты, именно уравнений, выражающих оправданность способов, используемых в оптимальном плане. Уравнения этой системы строятся на данных о производстве и потреблении продукции, причем в них наряду с производственными способами участвуют и способы замены продукции при потреблении и т. д

Но нет ли здесь противоречия с известным положением теории трудовой стоимости К. Маркса, согласно которому основой цен служит стоимость, т. е. общественно необходимые затраты труда? По нашему мнению, общественно необходимые затраты синтезируют в себе не столько фактическую величину затрат, сколько их общественно оправданный уровень. Поясним это положение. Например, при росте потребности в некотором продукте могут возрастать и общественно необходимые затраты на его производство. Действительно, бо́льшая потребность в продукте заставляет выпускать его в большем количестве, вовлекать в производство этого продукта некоторые предприятия, некоторые способы, связанные с бо́льшими затратами. Именно этими затратами и определяется цена в модели оптимального планирования. Как видим, она полностью согласуется с теорией трудовой стоимости.

В заключение вопроса об оптовых ценах следует сказать, что определение их не сводится только к процессу установления цен планирующими органами. Ценообразование — реальный жизненный процесс социалистической экономики, он основан на информации, представляемой производителями и потребителями, он зависит от их действий и влияет на их интересы. Поэтому очень важно, чтобы и потребители были активными участниками установления цен, чтобы они сами стремились к правильному их назначению и своевременному изменению. Такая заинтересованность, естественно, определяется не только ценообразованием, но и хозяйственным расчетом и экономическим стимулированием, и научно обоснованным планированием — всей системой хозяйственных форм, в которых реализуются экономические законы социализма.

Наряду с оптовыми ценами, по которым совершаются расчеты между государственными учреждениями и предприятиями, имеются розничные цены, по которым товары приобретаются населением для личного потребления. Розничные цены во многих случаях существенно отличаются от оптовых и по уровню, и по соотношениям. Такое положение достаточно оправданно, так как розничные цены имеют существенно другие функции, чем оптовые. Конечно, оптовая цена, отражающая уровень общественных затрат, связанных с производством данной продукции, имеет значение и при установлении розничной цены, но оптовая цена является здесь лишь одной из компонент.

Дело в том, что соотношение розничных цен оказывает существенное влияние на структуру потребления, поскольку каждый потребитель приобретает предметы потребления в соответствии со своими вкусами, платежным балансом и с учетом их цены и наличия. Так как для общества совсем не безразлична складывающаяся структура потребления, то оно использует планирование выпуска товаров и соотношение цен для установления наиболее благоприятной структуры потребления При этом розничные цены должны обеспечивать согласование спроса с наличным производством товаров. Наконец, они должны способствовать решению задачи мобилизации средств населения, а именно: сумма цен товарной массы, которая может быть реализована, должна находиться в равновесии с платежными средствами населения — зарплатой и другими доходами.

В соответствии с этим, если оптовая цена используется в качестве базы розничной цены, то расхождения между такой базой и самой розничной ценой (за счет налога с оборота, повышенной рентабельности и др.) могут быть далеко неодинаковыми для разных групп товаров, например предметов первой необходимости, предметов роскоши, нежелательных предметов потребления (водка, табак) и может даже отклоняться в сторону понижения по сравнению с оптовой ценой для особо желательных с общественной точки зрения товаров и услуг (детская одежда, общественное питание в школах, спортивный инвентарь, массовая общественно-политическая литература, предметы санитарии, лекарства, некоторые виды общественного транспорта). Эти отклонения могут быть различными даже для разных товаров одной и той же группы, например, в зависимости от эластичности спроса (см. гл. V, § 2). Для товаров, обладающих большей эластичностью, при возможности увеличения их производства может быть установлена более низкая цена, так как это увеличит спрос, размер дохода и лучше удовлетворит потребности населения. Наоборот, для товара из той же группы, обладающего незначительной эластичностью, может быть установлен несколько более высокий уровень цены, так как это не отразится на объеме удовлетворения потребности и в то же время даст дополнительный доход.

Таким образом, определение рациональной системы розничных цен представляет особую задачу, которая требует самостоятельного анализа и специальных оптимизационных моделей, своих критериев оптимальности.

Линейно-программные модели оптимального планирования позволяют найти новые подходы к анализу еще одной важной проблемы социалистической экономики — проблемы *сочетания централизованных и децентрализованных методов управления хозяйственными процессами.* И без всякой науки ясно, что, например, заказ и реализация уникальных турбин для Усть-Илимской ГЭС — это функция централизованного планирования, а не розничной торговли и, наоборот, нельзя планировать из центра обеды в ресторане по предварительным заказам на годы вперед, а нужно предоставить предприятиям общественного питания с учетом вкусов потребителя, под экономическим контролем хозяйственного расчета самим разнообразить свое меню. Но, если не говорить о такого рода крайних случаях, то далеко не всегда ясно, какие методы управления (или сочетания их), в какой именно сфере дадут наибольший эффект.

На первый взгляд кажется, что в оптимальной модели проблемы подобного рода не возникают. Здесь однозначно определяется (или задается) потребность, устанавливаются соответствующие ей объемы производства, обеспечивающие сбалансированное снабжение, строятся согласованные с планом оценки, являющиеся базой экономических решений. Принятие плановых и хозяйственных решений подкрепляется в модели системой экономических рычагов, которые обеспечивают такое положение, что все рациональное оказывается экономически выгодным. В условиях идеализированной экономики, которую описывает линейно-программная модель, эта система экономических рычагов подкрепляет и плановое управление, но, как уже отмечалось, собственно, не является необходимой. Однако она чрезвычайно важна для понимания принципов управления процессами, происходящими в реальном народном хозяйстве.

В реальном хозяйстве потребности, в частности потребности в предметах потребления, не могут быть точно определены заранее, а также не могут быть полностью выявлены и учтены в плане все производственные возможности. Выполнение плановых показателей и поставок по снабжению, как правило, отклоняется от заданных значений. Поэтому в управлении реальной экономикой используется не только централизованное планирование, но и взаимно согласованная с таким планированием система экономических рычагов и материальной заинтересованности производителей и потребителей, предполагающая известное самодействие хозяйственных ячеек (инициатива предприятий и объединений в пределах, допустимых планом). Эта система нередко называется рынком, хотя очевидно, что она очень далека от того, что понимается под рынком в капиталистической экономике.

Такой механизм прежде всего используется при продаже предметов потребления населению, где он совершенно необходим, можно сказать, предусмотрен самим устройством общества. Однако и при реализации средств производства с помощью этого механизма во многих случаях удается более правильно определить объем выпуска и уровни цен производимых товаров, добиться сбалансированности спроса и предложения, воздействуя на потребителя с помощью цены.

В ряде случаев через цену можно эффективно воздействовать и на производителя. Повышением цены, тем, что данное изделие делается особенно рентабельным, можно добиться от поставщика, что им будут вскрыты те возможности, ресурсы его производства, которые без этого, сверху, путем административных методов было бы трудно выявить и заставить действовать. По ряду продуктов промышленного назначения, например нефтепродуктам, фондирование снабжения оказывается, как показал эксперимент, проведенный в ряде областей, менее эффективным, чем оптовая торговля в соответствии с запросами потребителей.

Большую роль играет правильное распределение «областей влияния» между механизмами экономического управления — плановым механизмом и экономическим регулированием, сочетающимся с самодействием и материальной заинтересованностью.

План следует считать главным средством управления в социалистической экономике, основная сфера его действия там, где полнее соблюдаются модельные условия где мы имеем дело с массовым производством, установившимися или научно определяемыми нормативами затрат, достаточно точной и объективной информацией, эффективным контролем. Область самодействия: отклонения, неопределенность, наличие возможностей, которые не могут быть выявлены, описаны и эталонизированы достаточно точно и объективно.

Самодействие и экономические рычаги успешно подкрепляют, дополняют планирование. Нельзя, как это делали некоторые экономисты, переоценивать эффективность рыночного механизма, думать, что он способен стать самостоятельным средством управления. Надо помнить о том, что реализация функций этого механизма связана с большими потерями, требует длительного времени. Особенно малоэффективен механизм рынка при решении перспективных вопросов развития хозяйства. Невозможность доброкачественных прогнозов при принятии индивидуальных решений, необратимость этих решений (так как осуществленные капиталовложения, оказавшиеся излишними, не могут быть использованы в другой области) делают этот механизм негибким и неэффективным. Не удивительно, что даже в капиталистических странах вопросы перспективного развития решаются в значительной мере не с помощью механизма конкуренции, а посредством плановых программ и долгосрочных договоров, хотя понятно, что в условиях капитализма возможности планового регулирования крайне ограниченны. Отметим также, что применение в известных пределах у нас решения некоторых вопросов перспективного развития путем самодействия и экономических рычагов было бы возможно разве лишь при установлении реальной ответственности за отдаленные результаты принятых экономических решений; современный хозрасчет и система стимулирования эффективным механизмом такого рода не располагают.

Нужно помнить также, что широкое использование самодействия, стимулирования и материальной заинтересованности не всегда приемлемо и по другой причине. Стремление к повышению прибыли или других показателей работы предприятий часто может осуществляться не только благодаря мероприятиям, действительно повышающим эффективность производства, но и за счет мероприятий, только формально улучшающих показатели. Например, увеличение доли «выгодных» или материалоемких изделий, завышение цен, скажем, при индивидуальных заказах, использование наиболее выгодных участков в добывающей промышленности (хищническая добыча). Это возможности особенно велики именно там, где нормативы и прочая информация неопределенны и где, казалось бы, наиболее целесообразно использовать механизм самодействия

Действительно, широкое использование этого механизма чревато определенными опасностями. Частично они могут быть устранены за счет совершенствования системы экономических показателей, но одного этого мало. В особенности сказанное относится к тем областям, где мы имеем дело с одним поставщиком Если, к примеру, городской транспорт будет ориентироваться только на повышение доходности или на снижение себестоимости (при фиксированном тарифе), то выгодным для него окажется переполнение транспорта, отказ от обслуживания малонаселенных и отдаленных районов или их недостаточное обслуживание, сокращение длины маршрутов. Это положение не может быть исправлено только за счет улучшения обычных экономических показателей. По-видимому, было бы правильным в качестве основного показателя работы такой организации сделать сам действительный уровень обслуживания населения (при определенном уровне затрат). Поэтому наряду с материальной заинтересованностью должны быть установлены меры, обеспечивающие соблюдение интересов общества, честность, сознательность, не всегда материально стимулируемые и контролируемые. Одно надо по возможности исключить. чтобы то, что целесообразно и разумно, было невыгодным, иными словами, экономически преследовалось и каралось.

Таким образом, необходимо определить сферы хозяйства и управления, где эффективнее централизованное планирование, а где — оперативное регулирование с использованием экономических рычагов и самодействия, а также эффективное сочетание этих двух начал. По-видимому, невозможно, да и не нужно раз и навсегда заранее разделять эти сферы действия. Такое разделение должно определяться природой самого объекта, степенью совершенства методов планирования и регулирования на основе дальнейшего анализа опыта и практики.

Быть может, читателю поможет понять сравнение эффективности планирования и механизма экономического регулирования такая аналогия. Пусть требуется плотная укладка в пространстве (вагон, контейнер) различных предметов. При крупных или геометрически правильных предметах наиболее эффективным будет нахождение рациональной укладки с помощью расчетов, путем сравнения различных вариантов. Однако при мелких, неправильной формы предметах они лучше уложатся, если, не прибегая ни к каким расчетам, положить их внаброс, а потом утрясти.

Конечно, все конкретные методы управления хозяйственным процессом, все реально возникающие трудности и особенности их реализации не находят непосредственного отражения в линейно-программных моделях, но, несмотря на это, они могут существенно помочь при решении поставленной проблемы, позволяя вскрыть взаимоотношения и взаимосвязи этих методов управления, правильные принципы их сочетания и рациональные сферы действия.

Прежде всего анализ модели показывает, что оптимальное планирование отнюдь не предполагает полной централизации экономических решений. Напротив, благодаря тому, что вместе с оптимальным народнохозяйственным планом строится согласованная с ним система цен и других общественных оценок (норматив фондоотдачи, рента на землю и месторождения полезных ископаемых, норматив эффективности капиталовложений и др.), возникают реальные предпосылки для того, чтобы на местах принимались решения, максимально согласованные с народнохозяйственными интересами. Это дает широкие возможности использования инициативы производственных коллективов, способствующей мобилизации ресурсов и вскрытию резервов на местах, позволяет расширить права отдельных хозяйственных звеньев, обеспечивает условия для создания такой системы оценки и стимулирования экономической деятельности, при которой выгодное для общества в целом становится выгодным и для каждого предприятия. Иначе говоря, система оптимального планирования создает теоретическую базу для решения проблемы сочетания централизованного управления экономикой с материальной заинтересованностью и широкой инициативой предприятий и хозяйственных объединений.

Следует сказать, что в хозяйственной практике существуют области, где централизованные методы управления оказываются предпочтительнее децентрализованных методов, но имеются и такие области хозяйства, где соотношение этих методов противоположно. Многое в таком сочетании зависит от того, насколько научно обоснованно и совершенно планирование, насколько оперативно и гибко оно, каково качество прогнозов, а также сложность самой плановой задачи. Здесь можно провести некоторую аналогию с автоматическим управлением объектом, движущимся в пространстве. В простых случаях траектории такого движения реализуются с помощью начального управления, но более сложные задания могут осуществляться только с использованием обратных связей, с непрерывной корректировкой. И в экономике усложнение задач управления делает необходимым усложнение его методов, требует совершенствования централизованного планирования, а также использования новых форм управления, сочетания плана с самодействием хозяйственных единиц.

Модель оптимального планирования научно устанавливает возможность совмещения централизованных и децентрализованных методов управления экономикой и отсутствие между ними каких-либо антагонистических противоречий. Теоретический факт существования системы оценок, согласованной с планом, указывает на то, что самодействие и материальная заинтересованность в принципе (при правильной системе цен и других общественных оценок) не находится в противоречии с плановыми решениями. При этом наиболее естественной и благоприятной областью использования децентрализованных методов для управления экономикой является оперативное корректирование выполнения плана. Стохастический характер величины производительности труда, объема выпуска и других важных экономических параметров в большинстве отраслей (машиностроении, добывающей промышленности, сельском хозяйстве и др.), по-видимому, делает целесообразным, чтобы планы также не были жестко детерминированными, а учитывали стохастику, были рассчитаны на вероятный объем, математическое ожидание результатов.

Анализ модели, таким образом, приводит к выводу, что уже сейчас в реальной экономике было бы полезно поставить вопрос о применении нежесткого порядка планирования. Требование 100%-ного выполнения плановых предписаний по всем показателям нередко заставляет занижать план, брать такие обязательства, которые заведомо будут выполнены. Причем, если такой жесткий, минималистский план уже принят и в соответствии с ним определен план материального снабжения, фонд зарплаты, портфель заказов и т. д., то никакие вновь выявившиеся значительные возможности увеличения выпуска продукции, как правило, не могут быть реализованы (тем более, что само предприятие не очень заинтересовано в значительном превышении плана, опасаясь на следующий год получить повышенное задание).

При переходе к нежесткому планированию и снабжению и связанной с ними необходимостью оперативного регулирования выполнения плана может оказаться полезным более широкое применение некоторых форм децентрализованного управления. В снабжении, например, поставки материалов, соответствующие, скажем, 80—90%-ной потребности, сделанные по предварительным заказам и договорам, могут осуществляться по твердым ценам, а вновь возникшие требования — по более высокой цене с накидкой, варьируемой в зависимости от соотношения спроса и предложения. Может быть предусмотрен также инициативный (по инициативе предприятия) выпуск новых видов продукции с реализацией их именно не в плановом порядке, а в соответствии с реально предъявляемым спросом.

Управление социалистическим хозяйством, базируясь на плане, не должно сводиться к жестко детерминированному управлению. План отраслей и хозяйства в целом следует выражать во взаимосвязанных агрегированных показателях. Такой план должен предусматривать известные допуски, а также возможность оперативного корректирования в процессе его реализации. В процессе выполнения этого плана необходимо обеспечить сочетание его со значительным самодействием — свободой решений в исполнительных звеньях хозяйственной системы. Плановое фондированное снабжение должно дополняться свободной оптовой торговлей средствами производства; твердые цены на некоторые основные виды продукции должны сосуществовать с ценами на другие товары, изменяемые в соответствии со спросом и предложением.

Рассмотрение только части возможностей модели оптимального планирования, таким образом, показывает, что полученные с ее помощью представления вносят существенный вклад в теорию и практику социалистического хозяйствования. А это, если учесть еще многочисленные факты практического применения линейно-программных моделей, о которых говорилось в предшествовавших главах и речь идет в следующем параграфе, свидетельствует о высокой реальной ценности этих методов для нашего народного хозяйства.

4 ОПТИМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СЕГОДНЯ

Реальные возможности моделей оптимального планирования должны быть использованы в хозяйственной практике Существует ряд идей относительно того, как осуществить такое требование. Сейчас наиболее реалистической признана точка зрения, согласно которой вместо единой необозримой модели, описывающей народное хозяйство в целом, должен быть разработан и построен комплекс моделей, иерархически увязанных в соответствии со структурой народного хозяйства и описывающих отдельные части его на разных уровнях. Эти модели с разной степенью агрегирования охватывали бы народнохозяйственные проблемы и отдельные стороны экономической деятельности: модели производства, спроса и потребления, заработной платы, технического прогресса; далее следовали бы модели комплексов отраслей, скажем топливно-энергетический баланс, агрокомплекс; модели территориальные, относящиеся к крупным экономическим районам, областям, отдельным промышленным комплексам; модели, относящиеся к отдельным отраслям, и, наконец, отдельным производственным объединениям и предприятиям. Эта система моделей была бы взаимоувязана через критерии оптимальности, а также унификацию и увязку структуры информации, материальные потоки и балансы.

В настоящее время мы еще довольно далеки от составления такого полного и взаимосогласованного комплекса оптимальных моделей. Дело пока ограничивается построением ряда отдельных моделей на различных уровнях Эти модели опираются на существующую экономическую информацию, и их взаимное согласование и комплексирование достигаются только в отдельных случаях. При этом неизбежно допускаются компромиссные решения — отход от требований чистой теории. И все же даже на таком уровне объективный и систематический модельный подход к анализу планово-экономических вопросов существенно обогащает арсенал средств, которыми располагают экономическая наука и практика. Проверка на конкретном материале, практическое испытание новых методов немало способствуют развитию теории оптимального планирования, повышению эффективности новых средств управления народным хозяйством.

Перечислим и кратко охарактеризуем важнейшие из этих уже разработанных моделей. В первую очередь сюда относятся так называемые макроэкономические модели, основанные на глобальных народнохозяйственных показателях: валовой общественный продукт, национальный доход, фонд накопления и потребления. Эти модели дают возможность получить ориентировочные данные о будущем состоянии экономики при относительно неизменных направлениях ее развития. Таким образом, модели подобного рода учитывают главным образом инерционные экономические процессы и гораздо меньше приспособлены для анализа динамических изменений и сдвигов в развитии народного хозяйства (см. главу пятую).

Более точный и детальный экономический анализ позволяют осуществить многоотраслевые модели. Исходной базой для таких моделей является межотраслевой баланс, построенный на отчетных статистических данных, по которому определяются технологические коэффициенты прямых и полных затрат, а также коэффициенты фондоемкости. В матрицы коэффициентов текущих и фондовых затрат, полученных на основе отчетных данных, вносятся коррективы, учитывающие прогнозные тенденции развития соответствующих отраслей. Принимая определенные гипотезы относительно структуры конечного продукта в части предметов потребления, разрабатывают многоотраслевую модель плана развития экономики. Такая модель ввиду неточностей прогнозов и слишком крупного агрегирования, конечно, не дает ни оптимального, ни даже полностью реального плана. Однако то обстоятельство, что в многоотраслевой модели обеспечиваются сбалансированные соотношения основных экономических параметров, позволяет взять ее за основу общей гипотезы перспективного плана народного хозяйства, которая впоследствии может быть уточнена и конкретизирована. Существенным достоинством многоотраслевых моделей является то, что они позволяют «проиграть» большое число вариантов хозяйственного развития и, следовательно, дают возможность оценить, хотя бы приближенно, достоинства и недостатки различных путей развития экономики в данный период.

Наиболее богатый опыт оптимального планирования экономики накоплен в отраслевом планировании. По решению Госплана СССР оптимальные планы составлялись в последние годы более чем по 70 отраслям, охватывающим более половины промышленной продукции. Они использовались при составлении пятилетних планов. Для решения текущих задач функционирования и развития отрасли довольно широко применяются статические модели, связанные с использованием наличных производственных мощностей и наиболее рациональным распределением заказов и программ между предприятиями с учетом транспортных и эксплуатационных расходов. Отраслевое перспективное планирование использует главным образом полудинамические модели, с помощью которых решается задача достижения наилучшего результата развития отрасли к некоторому определенному моменту (например, каким образом на конец пятилетки можно получить заданный объем продукции с минимальными приведенными затратами, учитывающими капиталовложения и себестоимость). В гораздо меньшей степени отраслевое планирование использует пока собственно динамические модели, отражающие непрерывное развитие отрасли в течение всего планируемого периода. Это связано и со значительными сложностями, которые возникают при расчете таких моделей, и с трудностями получения необходимой информации на промежуточные годы.

Все оптимальные модели планирования отрасли, как правило, составлены по критерию минимума затрат. Конечно, если бы отраслевая модель была не изолированной, а строилась как элемент комплекса моделей, описывающих все народное хозяйство, то в ее задачи входило бы не только установление минимального уровня затрат, но и определение оптимального объема и структуры продукта, производимого отраслью. Однако пока такой комплекс моделей не реализован, объем и структура продукции задаются на основе традиционных методов планирования и оптимальные решения распространяются лишь на задачу получения этого объема и структуры с минимальными приведенными затратами.

Несмотря на указанную ограниченность используемых в настоящее время оптимальных отраслевых моделей, найденные с их помощью экономические решения являются весьма ценными. Они определяют правильные, экономичные пути развития отрасли, позволяют решать, какие предприятия, в каких районах целесообразно развивать, какие ограничивать. Причем особенно значительные результаты оптимальное планирование обеспечивает в однопродуктовых отраслях или, во всяком случае, в отраслях, продукция которых может быть достаточно объективно оценена не только в стоимостном, но и в натуральном выражении. По отношению к отраслям, производящим много видов продукции, построение, информационное обеспечение и расчет оптимальной модели значительно сложнее, а выводы менее бесспорны.

Следующий тип оптимальных моделей, по которым уже начались практические исследования, охватывает расчеты планов для комплекса отраслей. Наибольшие результаты получены при разработке топливно-энергетического баланса, оптимизирующего производство и потребление угля, нефти, газа и других ресурсов топлива и энергетики. Расчеты по этому балансу дали ряд ценных выводов как относительно пропорций и темпов развития отдельных отраслей, бассейнов и месторождений, входящих в комплекс, так и относительно установления цен на топливо. Еще один комплекс отраслей, где для планирования производства применяются оптимальные модели,— сельское хозяйство. Расчеты по таким моделям уже показали, что в этом экономическом комплексе оптимизация позволяет достигнуть значительного эффекта, например прийти к практически полезным результатам относительно улучшения структуры сельскохозяйственного производства. Следует иметь в виду, что все это только первые шаги в деле разработки и использования многоотраслевых моделей оптимального планирования.

Необходимо отметить еще один тип оптимальных расчетов — территориальные модели. Здесь тоже предпринимаются первые попытки практического применения. Были составлены межотраслевые балансы по отдельным республикам и областям, разрабатывались планы развития отдельных промышленных территориальных комплексов, проводились опыты по согласованию территориальных и отраслевых планов. Правда, до получения оптимальных результатов в этой области еще далеко. Расчеты оказались весьма сложными и трудоемкими и носят пока экспериментальный характер.

Наконец, имеется ряд разработок оптимальных решений для низового звена — планов предприятий. Такого рода планы составлялись для химических, машиностроительных и других заводов, для автохозяйств и прочих транспортных организаций, для строительных, сельскохозяйственных и иных непромышленных предприятий. Кроме того, накоплен довольно значительный опыт составления планов, оптимизирующих ту или иную сторону деятельности предприятия (например, внутризаводский транспорт, комплектование машинно-тракторного парка, распределение оборудования и др.). Почти все модели, предназначенные для оптимизации экономических решений на низшем уровне, обеспечивают быстрый и значительный эффект. Среди них можно назвать сетевые графики в проектировании и строительстве, календарные производственные планы, маршрутизацию на транспорте и рациональное распределение удобрений в сельском хозяйстве.

Говоря о построении моделей разных уровней и их использовании, нельзя не упомянуть и об интенсивно разрабатываемых автоматизированных системах управления (АСУ). Понятно, что, если даже найден оптимальный план той или иной экономической системы, дело этим еще не исчерпывается. Необходимо добиться осуществления этого плана, т. е. выполнения каждым звеном экономической системы предписанной ему работы. Руководство, учет, контроль — иначе говоря, процессы управления множеством таких звеньев и само планирование должны опираться на переработку многообразной информации, своевременно реагировать на возникающие в процессе производства ситуации. При современных масштабах производства функции управления могут наиболее эффективно осуществляться только в рамках автоматизированных систем Такие системы технически базируются на рационально организованном комплексе электронно-вычислительных машин, применение которых помимо быстродействия в обработке информации ведет к четкой организации производственных процессов (машины понимают только точный язык цифр), а это в конечном счете благоприятствует реализации оптимальных планов. Работа по созданию автоматизированных систем управления должна получить дальнейшее интенсивное развитие в настоящей пятилетке При этом согласно решению XXIV съезда партии дело не ограничивается отраслевыми системами, а ставится задача создания Объединенной Государственной системы обработки информации (ОГАС). Это обеспечивает особенно благоприятные условия для оптимизации планирования и управления народным хозяйством

Для дальнейшего распространения методов оптимального планирования имеют значение те большие изменения, которые произошли в подготовке экономических кадров. Почти во всех высших учебных заведениях экономического профиля (статистических, финансовых, экономических, инженерно-экономических и др.) введены курсы лекций по линейному программированию, применению ЭВМ и другим проблемам математической экономики. В некоторых вузах созданы особые отделения, где готовят высококвалифицированных специалистов по применению математических методов в народном хозяйстве — экономической кибернетике. Предусмотрено присвоение научным работникам ученых степеней и званий по специальности «Математические методы в экономических исследованиях». В меньшем объеме ведется подготовка математиков, специально ориентированных на работу в области математико-экономических исследований.

Математические методы в экономике, хотя и стали развиваться широко лишь в последние 10 лет, в настоящее время уже не представляют собой инородное тело, а органически вошли в советскую экономическую науку, обогатив ее новыми подходами и эффективными методами исследования Свидетельством этого является все возрастающее количество научных работ, в которых наряду с глубоким экономическим анализом того или иного процесса или явления содержатся его точные количественные оценки, даются основанные на них практические рекомендации.

Математические методы получают все более широкое использование в самых разнообразных областях экономической науки и практики. планировании, ценообразовании, расчетах эффективности, построении хозрасчета и материального стимулирования, изучении спроса на потребительские товары. Размах проводимых исследований колоссален — в области теории экономико-математических методов и их практических приложений работают тысячи ученых, сосредоточенных как в нескольких специализированных учреждениях, целиком посвященных этому направлению (Центральный экономико-математический институт АН СССР, Институт экономики и организации промышленного производства СО АН СССР), так и в специализированных отделах и лабораториях, имеющихся в большинстве экономических и технических институтов и в вычислительных центрах многих предприятий и учреждений. Выдающийся вклад в разработку этих проблем внесен ныне покойными акад. В. С. Немчиновым, профессорами В. В. Новожиловым, А. Л. Лурье, и А. Л. Вайнштейном, а также акад. Н. П. Федоренко, чл.-корр. А. Г. Аганбегяном, К. А. Багриновским, В. Д. Белкиным, И. Я. Бирманом, В. А. Булавским, Е. Г. Гольштейном, А. Г. Гранбергом, Э. Б. Ершовым, А. И. Каценелинбойгеном, В. Л. Макаровым, В. С. Михалевичем, Б. Н. Михалевским, С. М. Мовшовичем, Ю. А. Олейник-Оводом, Н. Я. Петраковым, В. Ф. Пугачевым, И. В. Романовским, Г. Ш. Рубинштейном, С. С. Шаталиным, Д. Б. Юдиным.

Широкое использование принципов оптимального программирования в экономике имеет не только практическое, но и идеологическое значение, помогает глубже и конкретнее понимать отличительные черты, потенциальные возможности и преимущества социалистического хозяйства.

Систематическое внедрение оптимального планирования на основе применения математических методов и моделей, более глубокое познание экономических законов социалистического хозяйства позволяет реализовать еще более высокие темпы развития материального производства, осуществить дальнейший рост благосостояния всего советского народа в соответствии с решениями XXIV съезда КПСС.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Принятие решений — один из элементов управления. Поэтому читателям книги было бы полезно познакомиться с некоторыми аспектами современной теории управления. Учитывая, что для этого нужна более основательная математическая подготовка, чем для чтения всех других разделов книги, рассмотрение проблем теории управления вынесено в приложение.

Общие сведения. Всякая система, которая изменяется с течением времени, обычно называется динамической системой. Пусть динамическая система в каждый момент времени характеризуется *вектором состояния* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Например, для движущегося автомобиля эти величины могут означать координаты автомобиля, его скорость, направление движения, количество бензина в баке и т п. Ради простоты в данный момент будем считать время меняющимся дискретно и моменты времени, когда наблюдается эта система, занумерованными так, что $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < \ldots$

Предполагается, что вектор состояния $x(t_k)$ полностью характеризует систему в момент t_k, описывает именно те характеристики системы, которые для нас существенны (например, вектор состояния может не определять цвет автомобиля, если нас интересует только закон его движения). В каждый момент времени t_i известны множества V_i возможных управлений v_i, с помощью которых система переводится из одного состояния в другое Вектор состояния системы в момент t_{k+1} однозначно определяется всеми предыдущими состояниями и управлениями, применявшимися ранее, иными словами

$$x(t_{k+1}) = \Phi(x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_k), v_0, v_1, \ldots, v_k).$$

Для большей наглядности обратимся к геометрической интерпретации вышесказанного. Вектор состояния в каждый момент можно изобразить точкой n-мерного пространства, которое в теории динамических систем обычно называют *фазовым пространством* Последовательность этих векторов, характеризующая движение системы, изображается последовательностью точек фазового пространства, носящей название *траектории системы* Если время считать дискретным, то и траектория дискретна (рис. I а), при непрерывности времени траектория тоже непрерывна (рис. I б). Начальной точкой траектории служит $x(t_0)$, и эта траектория конечна, т. е. имеет конечную точку $x(t_N)$, если последний момент времени, в который рассматривается система, равен t_N Как правило, существует множество траекторий, переводящих систему из состояния $x(t_0)$ в состояние $x(t_N)$.

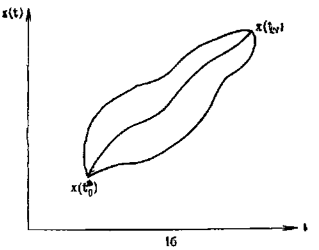


Рис I а

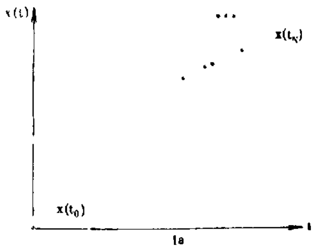


Рис I б

Так как управление обычно экстремально — имеется цель перевести систему из одного состояния в другое за кратчайшее время, или с наименьшими затратами, или так, чтобы получить наибольший возможный доход и т. п , то естественно считать, что целью управления является отыскание такой траектории (и таких управлений в каждый момент времени), на которой заданная числовая характеристика качества траектории достигает экстремума (максимума или минимума). Будем предполагать, следовательно, что каждой из траекторий по некоторому правилу сопоставляется число (или, как говорят математики, на множестве траекторий задан *функционал*) Отметим, что правильная постановка задачи управления предполагает наличие только одного функционала. Причина в том, что если взять два произвольных функционала, то может не существовать такой траектории, на которой они оба достигнут экстремума. Имеет смысл искать экстремум только одного функционала при заданных ограничениях на другой (или другие)

Как связана теория управления с изучавшимися в книге вопросами принятия решений в различных экономических задачах? Дело в том, что экономику и отдельные ее подразделения можно рассматривать как динамические системы, которые в каждый момент времени описываются определенным вектором состояния. Компоненты вектора характеризуют различные технологические возможности, запасы сырья, ресурсы рабочей силы и др. Принятие решения означает перевод экономики из одного состояния в другое В зависимости от потребностей общества та или иная траектория экономической системы является наиболее предпочтительной. Ее и следует определить Налицо задача управления Она характеризуется колоссальной размерностью векторов состояний, сложностью функций Φ, управлений и функционалов. Пока не имеется методов, позволяющих решить задачу управления во всей ее общности Тем не менее экономистам полезно познакомиться с некоторыми основными принципами исследования задач управления, чтобы иметь и это оружие в арсенале средств анализа и решения экономических задач

Вариационное исчисление Рассмотрим такую экономическую задачу В момент времени t функция $x(t)$ характеризует величину выпуска продукции фирмы Известно, что чистый доход фирмы в единицу времени зависит от величины выпуска (чем больше выпуск, тем больше затраты), скорости изменения этой величины (чем быстрее меняется величина выпуска, тем с бóльшими переналадками это связано и, естественно, ведет к бóльшим материальным затратам и затратам времени). Иначе говоря, чистый доход определяется функцией $u(x(t), x'(t), t)$ Деятельность фирмы изучается в течение промежутка времени $[0, T]$.

Заданы также величина выпуска в начальный момент $x(0) = x_0$ и желательная величина выпуска в конечный момент $x(T) = x_T$. При таких условиях требуется найти величину выпуска $x(t)$ в каждый момент времени, причем так, чтобы суммарный доход за весь промежуток времени был наибольшим, т. е. требуется найти максимум функционала

$$(1) \qquad W[x(t)] = \int_0^T u(x(t), x'(t), t)\,dt.$$

Множество дифференцируемых функций, заданных на $[0, T)$ и удовлетворяющих условиям $x(0) = x_0$ и $x(T) = x_T$, образует множество возможных траекторий. (В нашей задаче оно совпадает с множеством возможных управлений) Та траектория, на которой функционал достигает экстремума, называется *экстремалью*. Вопросами поиска экстремалей для функционалов различного вида занимается вариационное исчисление, один из типичных подходов которого мы обсудим.

На рис. II изображено множество траекторий, соединяющих заданные начальное и конечное состояния. Попытаемся указать свойство, которое характеризовало бы экстремаль в целом Пусть функция $\bar{x}(t)$ является экстремалью функционала (1). Если сравнить значение функционала на экстремали со значением его на любой из возможных траекторий, то из определения экстремали следует неравенство

$$W[\bar{x}(t)] - W[x(t)] \geqslant 0.$$

Выясним, как меняется значение функционала при переходе от экстремальной траектории к другой, достаточно близкой Прежде всего заметим, что эта близкая траектория может быть получена

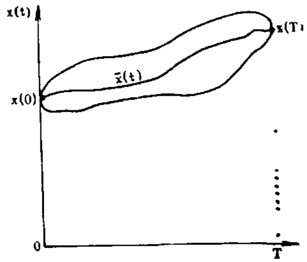


Рис. II

путем малой «деформации» экстремали, как говорят, с помощью варьирования. Иными словами, всякую соседнюю с экстремалью траекторию можно описать функцией $\bar{x}(t) + \delta x(t)$, где $\delta x(t)$ — произвольная дифференцируемая функция, принимающая малые значения, малы и значения $(\delta x(t))'$, а также выполняются граничные условия

$$\bar{x}(0) + \delta x(0) = x_0 \text{ и } \bar{x}(T) + \delta x(T) = x_T.$$

Из этих условий сразу следует, что $\delta x(0) = \delta x(T) = 0$, т. е. при варьировании экстремали начальная и конечная точки остаются неподвижными.

Приращение функционала ΔW при переходе от экстремали к соседней траектории определяется равенством

$$\Delta W = W[\bar{x}(t) + \delta x(t)] - W[\bar{x}(t)] =$$

$$= \int_0^T u(\bar{x}(t) + \delta x(t), \bar{x}'(t) + \delta x(t)', t)\,dt -$$

$$- \int_0^T u(\bar{x}(t), \bar{x}'(t), t)\,dt = \int_0^T [u(\bar{x}(t) + \delta x(t), \bar{x}'(t) +$$

$$+ (\delta x(t))', t) - u(\bar{x}(t), \bar{x}'(t), t)]\,dt.$$

Пользуясь формулой Тейлора, разложим подынтегральное выражение, выделяя линейную часть разложения

Имеем

$$(2)\qquad \Delta W = \int_0^T [u'_x(\bar{x}, \bar{x}', t)\,\delta x(t) + u'_{x'}(\bar{x}, \bar{x}', t) \times$$
$$\times (\delta x(t))']\,dt + O(\delta x(t)),$$

где $O(\delta x(t))$ — члены высшего порядка малости по сравнению с $\delta x(t)$ и $[\delta x(t)]$

Так как $\Delta W \leqslant 0$. отсюда с необходимостью следует, что линейная часть разложения должна равняться нулю. В противном случае перемена знака у произвольной функции $\delta x(t)$ привела бы к перемене знака величины ΔW. (Это объясняется тем, что знак правой части (2) определялся бы знаком первого слагаемого, большего по величине, чем все остальные.) Поскольку перемены знака ΔW быть не может, справедливо равенство

$$(3)\qquad \int_0^T [u'_x(\bar{x}, \bar{x}', t)\,\delta x(t) + u'_{x'}(\bar{x}, \bar{x}', t) \times$$
$$\times (\delta x(t))']\,dt = 0.$$

Именно равенство (3) и является необходимым условием, характеризующим экстремаль «в целом» — функция $\bar{x}(t)$ должна обязательно удовлетворять уравнению (3).

Покажем теперь, как преобразовать уравнение (3) для того, чтобы им удобнее было пользоваться.

Интегрируя по частям второе слагаемое в (3) и используя граничные условия $\delta x(0) = 0$ и $\delta x(T) = 0$, получаем

$$(4)\qquad 0 = \int_0^T u'_x \delta x(t)\,dt + u'_{x'}\,\delta x(t)\Big|_0^T - \int_0^T \frac{d}{dt}[u'_{x'}] \times$$
$$\times \delta x(t)\,dt = \int_0^T \left[u'_x - \frac{d}{dt}(u'_{x'})\right] \delta x(t)\,dt.$$

В силу произвольности функции $\delta x(t)$ последний интеграл может равняться нулю только в том случае, когда выражение в квадратных скобках равно нулю. (Предполагается, что выражение в квадратных скобках и функция $\delta x(t)$ непрерывны.)

Следовательно,

$$(5) \qquad u'_x - \frac{d}{dt}(u'_{x'}) = 0.$$

Полученное дифференциальное уравнение второго порядка носит название уравнения Эйлера Решая это уравнение с заданными граничными условиями $x(0) = x_0$ и $x(T) = x_T$, можно найти экстремаль

В качестве примера использования этого уравнения вернемся к рассматриваемой задаче, сделав ряд конкретных предположений. Будем считать, что $u(x, x', t) = ax - b(x')^2$ (доход в единицу времени складывается из дохода, обусловленного выпуском $x(t)$, и затрат, связанных с изменением величины выпуска), $x(0)$ и $x(T$ заданы Окончательно приходим к следующей задаче найти максимум функционала

$$\int_0^T [ax(t) - b(x'(t))^2]\, dt$$

при граничных условиях $x(0) = x_0$ и $x(T) = x_1$.
Составляем уравнение Эйлера для этого функционала

$$a + 2bx'' = 0.$$

Решение уравнения дает

$$x(t) = -\frac{a}{4b}t^2 + C_1 t + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий, т. е экстремаль представляет собой параболу

Динамическое программирование. В § 1 гл. III рассматривался метод динамического программирования, весьма эффективный при изучении многошаговых процессов принятия решений. Тот же метод оказывается полезным и при решении непрерывных задач управления Чтобы показать это, сначала опишем концепцию в целом, а потом проиллюстрируем ее на примере

Применяя методы вариационного исчисления, пытаются сразу охарактеризовать искомый объект путем построения дифференциального уравнения, решением которого и является искомая экстремаль Между тем это не единственный путь Представляется возможным находить экстремальную траекторию не всю сразу, а по частям, пусть даже очень маленьким Грубо говоря, ситуация подобна следующей Если нам нужно дать указание, как пройти из одного пункта в другой, то либо следует сразу описать всю дорогу, либо после каждого шага сообщать, куда следует сделать очередной шаг. В этом случае человек будет полностью знать дорогу, когда дойдет до конечного пункта. Так вот, первый способ аналогичен методу вариационного исчисления, второй же — методу динамического программирования.

Подобная двойственность описания одного и того же объекта обусловлена тем, что всякую гладкую кривую можно трактовать либо как геометрическое место точек, удовлетворяющих некоторому уравнению, либо как огибающую семейства касательных к этой кривой.

Итак, задачу поиска непрерывной экстремали можно рассматривать как непрерывный процесс принятия решений — в каждой ее точке мы должны уметь находить, куда передвинуться, чтобы попасть в следующую точку. Разумеется, это всего лишь математическая абстракция, так как физически неосуществимо принятие решений во всех точках кривой — их слишком много. При решении конкретных задач непрерывная кривая аппроксимируется ломаной или заменяется дискретным множеством точек. Рассмотрим этот метод на примере уже известной нам задачи, несколько видоизменив ее.

Будем считать, что доход фирмы в единицу времени зависит от объема выпуска продукции $x(t)$, от наличного основного капитала фирмы $K(t)$ и времени t, т. е. определяется функцией $u(K(t), x(t), t)$. Запас капитала связан с принимаемым решением — величиной выпуска — таким соотношением

$$(6)\qquad \frac{dK}{dt} = f(K, x, t)$$

(скорость накопления в каждый момент есть функция от имеющегося основного капитала, величины выпуска и момента времени). Известен также начальный размер основного капитала $K(0) = C$.

При этих условиях требуется, так же как и раньше, найти объем выпуска продукции $x(t)$, который доставлял бы максимум функционалу

$$W[x(t)] = \int_0^T u(K(\tau), x(\tau), \tau)\, d\tau.$$

Основное отличие этой задачи от той, что была рассмотрена выше, состоит в наличии ограничения (6), обусловливающего тот факт, что принимаемое решение имеет двойной эффект — немедленный вклад в суммарный доход и воздействие на запас капитала и доход в последующие моменты времени На вдаваясь в математические тонкости, отметим, что это ограничение не дает возможности непосредственно использовать уравнение Эйлера для нашей задачи. Нужно сказать, что и вообще использование для нее классических методов вариационного исчисления весьма затруднено. Методы же динамического программирования позволяют преодолеть возникающие трудности. Это тем более ценно потому, что в реальных задачах, как правило, приходится сталкиваться именно с экстремальными задачами с ограничениями.

Итак, мы должны уметь в каждый момент времени t наилучшим образом выбирать функцию $x(t)$. Сопоставим этой задаче ее дискретную аппроксимацию. Будем искать

$$(7) \qquad \max_{\{x_i\}} \sum_{i=0}^{N-1} u(K_i, x_i, t_i)\,\Delta$$

при условиях

$$K_{i+1} - K_i = f(K_i, x_i, t_i)\,\Delta, \quad t_0 = 0, \quad t_N = T, \quad K_0 = C.$$

Здесь приняты обозначения $K_i = K(t_i)$ и $x_i = x(t_i)$, а $t_0, t_1, \ldots$ .., t_N — моменты времени из промежутка t, отстоящие друг от друга на величину Δ.) Тем самым, вместо того чтобы искать функцию $x(t)$, заданную на промежутке $[0, T]$, мы будем только выбирать значения ее в фиксированных заранее точках $t_0, t_1, \ldots, t_N$.

«Погрузим» нашу задачу в семейство таких однотипных задач: найти максимум функционала

$$(8) \qquad W_s[x_s, x_{s+1}, \ldots, x_N] = \sum_{i=s}^{N-1} u(K_i, x_i, t_i)\,\Delta$$

при условиях

$$K_s = c, \; K_{i+1} - K_i = f(K_i, x_i, t_i)\,\Delta \quad (i = s, s+1, \ldots, N-1).$$

Понятно, что максимум каждого такого функционала зависит от величин s и c. Обозначим его через $\Phi_s(c)$, т. е.

$$\max_{\{x_i\}} W_s[x_s, \ldots, x_N] = \Phi_s(c).$$

На основании принципа оптимальности (см. стр 96) сразу же можно прийти к следующим рекуррентным соотношениям:

$$
(9)\qquad \begin{aligned}
&\Phi_N(c) = 0,\\
&\Phi_s(c) = \max_{\{x_s\}} \{u(c,\ x_s,\ t_s)\Delta +\\
&+ \Phi_{s+1}(c + f(c,\ x_s,\ t_s)\Delta)\}\\
&(s = N - 1,\ N - 2, \ldots, 0).
\end{aligned}
$$

Вычисляя последовательно функции $\Phi_s(c)$ и запоминая соответствующие оптимальные стратегии, можно найти численное решение поставленной задачи — величина $\Phi_0(C)$ представляет собой максимальное значение функционала задачи (7), величины же x_i, на которых достигаются максимумы в соотношениях (9), определяют оптимальные объемы выпуска продукции в моменты t_i. Важно заметить, что если величины x_s подчинены каким-либо дополнительным ограничениям, то максимум берется по допустимому множеству значений. В этом большое преимущество метода динамического программирования.

Принцип максимума Понтрягина. Начнем с геометрического пояснения этого принципа, разработанного советским математиком, академиком Л. С Понтрягиным и его сотрудниками, а уже потом перейдем к соответствующему аналитическому аппарату. В качестве иллюстрации по-прежнему будем использовать задачу об определении объема выпуска продукции фирмы.

Для большей простоты предположим, что объем выпуска продукции непосредственно на приращении дохода не сказывается. Другими словами, будем считать, что функция $u\ (K,\ x,\ t)$ на самом деле не зависит от x.

Состояние динамической системы — фирмы — в каждый момент вполне определяется ее наличным капиталом K. Цель управления — максимизация дохода — состоит в том, чтобы среди всех траекторий на плоскости $(K,\ t)$, исходящих из данной точки $(c,\ 0)$, найти ту, на которой достигает максимума функционал (1).

Для каждой точки $(K,\ t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ рассмотрим задачу о том, как следует управлять фирмой, имеющей в момент t капитал K, чтобы обеспечить за время от t до T максимум дохода. Величина этого максимального дохода, очевидно, зависит от начальной точки $(K,\ t)$, так что на плоскости $(K,\ t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ определена функция $V^*\ (K,\ t)$

Изобразим линии уровня этой функции (см. рис. III). Внешние нормали к линиям уровня этой функции обладают очень важным свойством: они указывают скорость накопления капитала, обеспечивающую наибольшее относительное приращение дохода (на единицу капиталовложений) Если, имея в момент t капитал K, мы установим объем выпуска продукции равный x, то фактически на плоскости (K, t) мы будем двигаться в направлении вектора z с компонентами $(f(K, x, t), 1)$ Поэтому для обеспечения максимального приращения дохода мы должны выбирать объем выпуска продукции x так, чтобы проекция вектора z на внешнюю нормаль к линии уровня функции V^* в соответствующей точке была максимальна

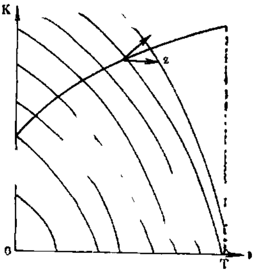


Рис III

Такова идейная сторона принципа максимума Аналитический аппарат мы проиллюстрируем на более общей задаче, не предполагая независимости функции u от x Пусть

$$W(K_t, x, t) = \int_t^T u(K, x, \tau)\, d\tau \quad \text{и}$$

$$V^*(K_t, t) = \max_{\{x\}} W(K_t, x, t),$$

где максимум берется по всем допустимым управлениям x

Понятно, что первая величина выражает доход, полученный фирмой за время от t до T, если в момент t запас капитала равняется K_t и выбрано управление $x(t)$ Вторая же — доход, соответствующий оптимальному управлению $\bar{x}(t)$.

Промежуток времени $[t, T]$ разобъем на две части — короткий промежуток Δ и остающийся $[t + \Delta, T]$. Тогда, применяя принцип оптимальности (см стр 96), можно получить такое соотношение

$$(10) \qquad V^*(K_t, t) = \max_{x_t} \{u(K_t, x_t, t)\,\Delta + V^*(K_{t+\Delta}, t+\Delta)\}.$$

(максимальный доход, получаемый от момента t до T, если в момент t запас капитала K_t)	(доход за короткий промежуток Δ)	(максимальный доход, получаемый от момента $t + \Delta$ до T, если в момент $t + \Delta$ запас капитала $K_{t+\Delta}$)

С другой стороны, если $\bar{x}_t$ — оптимальный выпуск в момент t, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δ,

$$(11)\qquad V^*(K_t,\ t) = u(K_t,\ \bar{x}_t,\ t)\,\Delta + V^*(\bar{K}_{t+\Delta},\ t+\Delta).$$

Предположим для простоты, что V^* дифференцируема Тогда из (10) (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) следует

$$0 = \max_{x_t}\{u(K_t,\ x_t,\ t)\,\Delta + V^*(K_t + f(K_t,\ x_t,\ t)\,\Delta, t+\Delta) -$$
$$- V^*(K_t,\ t)\} = \Delta \max_{x_t}\{u(K_t,\ x_t,\ t) +$$
$$+ \frac{V^*(K_t + f(K_t,\ x_t,\ t)\,\Delta,\ t+\Delta) - V^*(K_t,\ t)}{\Delta}\Bigg\},$$

откуда следует, что

$$\max_{x_t}\left\{u(K_t,\ x_t,\ t) + \frac{\partial V^*}{\partial K}(K_t,\ t)\,f(K_t,\ x_t,\ t) + \frac{\partial V^*}{\partial t}(K_t,\ t)\right\} = 0,$$

или, полагая

$$\frac{\partial V^*}{\partial K}(\bar{K}_t,\ t) = -\lambda(t)$$

$$\max_{x_t}\left\{u(K_t,\ x_t,\ t) - \lambda(t)\,f(K_t\ x_t,\ t) + \frac{\partial V^*}{\partial t}(K_t,\ t)\right\} = 0.$$

Точно так же из (11) можно получить равенство

$$u(K_t,\ \bar{x}_t,\ t) - \lambda(t)\,f(K_t,\ \bar{x}_t,\ t) + \frac{\partial V^*}{\partial t} = 0,$$

т. е.

$$(12)\qquad u(K_t,\ \bar{x}_t,\ t) - \lambda(t)f(K_t,\ \bar{x}_t,\ t) = \max_{x_t}\{u(K_t, x_t, t) - \lambda(t)\,f(K_t,\ x_t,\ t)\}.$$

Наконец, дифференцируя соотношение (11) по K_t (принимая во внимание, что $K_{t+\Delta} = K_t + f(K_t,\ \bar{x},\ t)\ \Delta$) и устремляя Δ к нулю, получаем

$$-\lambda'(t) = \frac{\partial u}{\partial K} - \lambda\,\frac{\partial f}{\partial K}.$$

Величина $-\lambda'(t)$ характеризует скорость обесценивания единицы капитала в момент t.

Итак, можно сделать следующий вывод. Оптимальное управление x в каждый момент должно удовлетворять таким уравнениям:

$$\text{(I)} \qquad \frac{dK}{dt} = f(K, x, t),$$

$$\text{(II)} \qquad u - \lambda f = \max_{x} (u - \lambda f),$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial u}{\partial K} - \lambda \frac{\partial f}{\partial K} = -\lambda'.$$

Американский экономист Дорфман, исследовавший данную задачу, придает этим уравнениям следующий экономический смысл:

(I) — характеризует темп роста капитала в каждый момент в зависимости от текущего состояния и принимаемого управления;

(II) — показывает, что очищенный доход, т. е. доход, из которого исключена маргинальная предельная оценка накапливаемого капитала, в каждый момент максимален на оптимальной траектории;

(III) — скорость обесценивания капитала при оптимальном управлении определяется маргинальной оценкой капитала для максимизации дохода Чем выше эта оценка, тем медленнее происходит обесценивание.

Решение уравнений (I) — (III), составляющих аналитическое выражение принципа максимума, может быть осуществлено одним из многочисленных методов, разработанных в теории дифференциальных уравнений. Нередко оно оказывается более простым, чем решение исходной задачи другими методами.

ЛИТЕРАТУРА

Аганбегян А. Г., Гранберг А. Г. Экономико-математический анализ межотраслевого баланса СССР. «Мысль», 1968

А. Г. Аганбегян, К. А. Багриновский, А. Г. Гранберг Системы моделей народнохозяйственного планирования. «Мысль», 1972

Аллен Р. Г. Математическая экономия. ИЛ, 1963

Акоф Р. Л., Райветт П. Исследование операций. «Мир», 1966

Арис Р. Дискретное динамическое программирование «Мир», 1969

Баумоль У. Экономическая теория и исследование операций «Прогресс», 1965

Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. ИЛ, 1962.

Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления «Наука», 1969.

Беллман Р. Динамическое программирование. ИЛ, 1960.

Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования «Наука», 1965.

Бир С. Кибернетика и управление производством, Физматгиз, 1963.

Бирман И. Я. Транспортная задача линейного программирования Экономиздат, 1962.

Бирман И. Я. Оптимальное программирование «Экономика», 1968.

Блекуэлл Д., Гиршик М. А. Теория игр и статистических решений ИЛ, 1958

Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления, 2-е изд. «Наука», 1969.

Булавский В. А., Рубинштейн Г. Ш. Несколько лекций по линейному программированию, РИО СО АН СССР. Новосибирск, 1965

Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем «Наука», 1968

Вентцель Е. С. Введение в исследование операций «Советское радио», 1964.

Вентцель Е. С. Элементы теории игр. Физматгиз, 1960

Вентцель Е. С. Элементы динамического программирования «Наука», 1964.

Вильямс Дж. Д. Современный стратег или букварь по теории стратегических игр «Советское радио», 1960.

Винер Н. Кибернетика «Советское радио», 1968

Волконский В. А. Модель оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей. «Наука», 1967

Гасс С. И. Линейное программирование Физматгиз, 1961

Гейл Д. Теория линейных экономических моделей ИЛ, 1963.

Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании «Советское радио», 1966

Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа «Наука», 1969

Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. «Прогресс», 1966

Дудкин Л. М. Оптимальный материальный баланс народного хозяйства (Модели для текущего и перспективного планирования). «Экономика», 1966.

Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Ли-

нейное и выпуклое программирование «Наука», 1964
Канторович Л В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд-во АН СССР, 1959
Канторович Л В. О перемещении масс ДАН СССР, 37, № 7—8, 1942
Канторович Л. В. Математические методы в организации и планировании производства Изд-во ЛГУ, 1939 Перепечатана в сб «Применение математики в экономических исследованиях» (под ред В С Немчинова) Соцэкгиз, 1961
Канторович Л В , Макаров В. Л. Оптимальные модели перспективного планирования В сб «Применение математики в экономических исследованиях», т III «Мысль», 1965
Канторович Л. В., Гавурин М К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков В кн «Проблемы повышения эффективности работы транспорта» Изд-во АН СССР, 1949
Канторович Л. В , Вайнштейн Альб Л. Об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития народного хозяйства «Экономика и математические методы», т III, вып V, 1967
Канторович Л. В , Залгаллер В А. Рациональный раскрой промышленных материалов, изд 2 «Наука», 1971
Карлин С Математические методы в теории игр, программировании и экономике «Мир», 1964
Карр Ч., Хоув Ч. Количественные методы принятия решений в управлении и экономике «Мир», 1966
Каценелинбойген А. И , Овсиенко Ю. В., Фаерман Е. Ю. Методологические вопросы оптимального планирования социалистической экономики Изд-во ЦЭМИ АН СССР, 1966
Каценелинбойген А И , Лахман И. Л., Овсиенко Ю. В Оптимальность и товарно-денежные отношения «Наука», 1970
Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику ИЛ, 1963
Козлов Л А. Оптимальное планирование развития и размещения отраслей промышленности «Наука», 1970
Корбут А А., Финкельштейн Ю Ю. Дискретное программирование «Наука», 1969
Кофман А , Фор. Р. Займемся исследованием операций «Мир», 1966
Кофман А. Методы и модели исследования операций «Мир», 1966
Кофман А., Дебазей Г Сетевые методы планирования и их применение «Прогресс», 1968
Ланге О. Оптимальные решения «Прогресс», 1967
Ланкастер К Математическая экономика «Советское радио», 1972
«Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ, 1959
Лурье А Л. О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства «Наука», 1964
Льюс Р. Д. Райфа Х. Игры и решения ИЛ, 1961
Мак-Кинси Дж Введение в теорию игр Физматгиз, 1960
«Математика и кибернетика в экономике» Словарь справочник «Экономика», 1972
«Математические модели и методы оптимального планирования» (сб статей) «Наука», 1966
Михалевич В С., Шор. Н. З. Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов В кн «О численных методах решения многовариантных плановых и технико-экономических задач» Изд-во АН СССР, 1962
Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. «Наука», 1971
Моисеев Н. Н. Математика—управление—экономика «Знание», 1970
Нейман Дж , Моргенштерн О Теория игр и экономическое поведение «Наука», 1970
Немчинов В. С. Экономико-математические методы и модели. Соцэкгиз, 1962
Новожилов В В. Проблемы измерения затрат и результатов при оптималь-

ном планировании «Экономика», 1967

Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф Математическая теория оптимальных процессов Физматгиз, 1961

«Проблемы оптимального функционирования социалистической экономики», под ред Н П Федоренко «Наука», 1972

Пугачев В. Ф Оптимизация планирования «Экономика», 1968

Рубинштейн Г. Ш. Конечномерные модели оптимизации Изд-во НГУ, 1970

Саати Т. Математические методы исследования операций Воениздат, 1963

Терехов Л Л Оценки в оптимальном плане «Экономика», 1967

Тинберген Я, Бос Х. Математические модели экономического роста «Прогресс», 1967

Уайлд Л. Дж. Методы поиска экстремума «Наука», 1967.

Фан Лянь-цэнь, Вань Чу-сен Дискретный принцип максимума «Мир», 1967

Федоренко Н. П. О разработке системы оптимального функционирования экономики «Наука», 1968

Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях «Мир», 1966

Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование «Мир», 1967

Черчмен У, Акоф Р., Арноф Л. Введение в исследование операций. «Наука», 1968

Эрроу К Дж, Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию ИЛ, 1962

Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования, изд 2-е «Советское радио», 1964.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА ПЯТАЯ

ГЛАВА ШЕСТАЯ

Академик
Леонид Витальевич
КАНТОРОВИЧ

Александр Борисович
ГОРСТКО

Оптимальные решения в экономике

Утверждено к печати
редколлегией серии научно-популярных изданий
Академии наук СССР

Редактор **Л С Глязер**
Редактор издательства **Л В Лукашевич**
Художественный редактор **В Н Тикунов**
Технический редактор **Н Н Плохова**

Сдано в набор 12/IV 1972 г
Подписано к печати 5/IX-1972
Формат 84×108 1/32 Бумага № 2
Усл печ л 12,18 Уч-изд л 11,5
Тираж 35 000 экз **Т-15622** Тип зак 449
Цена 69 коп

Издательство «Наука»
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер , 21

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва Г-99, Шубинский пер , 10

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
13	14 сн	$M_1M_2M_3M_4$	$M_1M_2M_4M_3$
18	13 св.	в используемых	во всех
24	11 св.	в направлении, указанном на рис. 4.	, отдаляя от точки O.
27	8 сн	перемены, и	перемены, а
29	6—7 сн.	учитывающие	учитывающим
34	5 св	если в нем	если на нем
64	12—13 сн	затрат по обработке	цены обработки
66	21 св.	средний прокат	средний сорт
70	25 сн.	на гектаре земли	на земле
74	4 св	, т. е учитывается	, учитывается
100	17 св	нелинейной задачи	задачи
100	19 св.	и даже линейной	линейной и нелинейной
120	3 и 6 св.	k	K
121	16 сн	складывается	, складывается
125	2 св.	поведения в простейшем случае,	поведения, в простейшем случае
129	7 св	выигрыш	гарантированный выигрыш
131	13 сн	будем иметь	получим седловую точку
140	23 св	потребигелями	потребителям
153	3 сн	$W_i = V_i -$	$W_i = V_i +$
162	5 св	определяющаяся	определяется
163	2 сн	Дифференцируя,	Дифференцируя (5),
164	8 св	(dP/dt)	$(1/P\ dP/dt)$
167	2 сн.	оплаты труда	оценки труда
169	13 св.	равновременных	разновременных
182	4 сн.	экономической	динамической
216	3 св.	(рис. Ia)	(рис. Iб)
216	4 св.	(рис. Iб)	(рис. Ia)

Л. В Канторович, А. В. Горстко